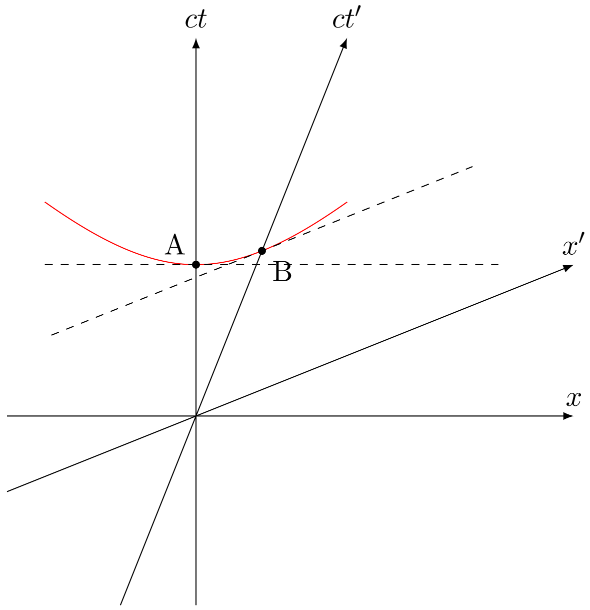
Σχετικότητα

Από τους μετασχηματισμούς Galileo στον τετραδιάστατο χωροχρόνο



Παπαδημητρίου Χ. Γιώργος

Ναύπακτος 2012

Αφιερώνεται σε όλα τα, ενεργά και μή, μέλη του ylikonet.gr
και ιδιαίτερα στον Δ. Μάργαρη...

Περιεχόμενα

1 Πριν τον Maxwell

1.1 Μερικές ύπουλες παραδοχές

Ύπουλες παραδοχές είναι αυτές που κάνουμε *χωρίς να το καταλαβαίνουμε.* Παρατηρούμε τον κόσμο γύρω μας και βλέπουμε πράγματα σε διάφορες θέσεις και σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Βλέπουμε φαινόμενα, πράγματα να αλλάζουν, και υποθέτουμε ότι και ο διπλανός μας παρατηρεί τα ίδια με εμάς. Συμπεραίνουμε κρίνοντας εξ ιδίων τα αλλότρια. Γενικεύουμε, αποφαινόμενοι για το Σύμπαν, παρατηρώντας τη γειτονιά μας.

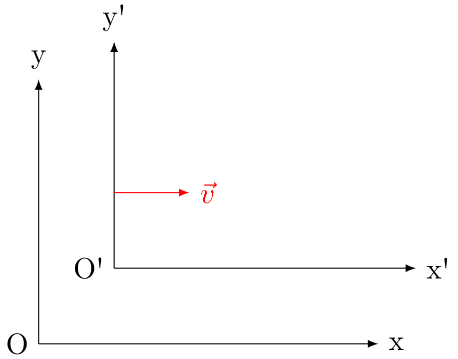
Ίσως να είναι ένας τρόπος ύπαρξης. Δεν μας πήγε κι άσχημα ως είδος, αν και μερικές φορές τα συμπεράσματά μας ήταν τραγικά λάθος όταν τα μεγεθύναμε γενικεύοντάς τα. Για παράδειγμα η Γη φαίνεται επίπεδη τοπικά. Η γεωμετρία της μοιάζει Ευκλείδεια. Όμως η ευρύτερη τοπολογία της είναι σφαιρική, και το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου στην επιφάνειά της *δέν* κάνει 180°. Ένα σώμα χρειάζεται συνεχώς να δέχεται δύναμη για να κινηθεί με σταθερή ταχύτητα. Κι αυτό το συμπέρασμα χρειάστηκαν αιώνες για να τροποποιηθεί.

Δύο παραδοχές που δύσκολα μπορεί να τις αμφισβητήσει κάποιος είναι:

Αξίωμα. 1.1 *Ο χρόνος είναι ο ίδιος σε όλο το Σύμπαν.*

Αξίωμα. 1.2 *Ο χώρος είναι ο ίδιος σε όλο το Σύμπαν.*

Ένα *αδρανειακό σύστημα αναφοράς* ορίζεται ως ένα σύστημα στο οποίο ισχύει *η αρχή της αδράνειας*, δηλαδή ότι ένα ακίνητο σώμα συνεχίζει να παραμένει ακίνητο όσο δεν ασκούνται δυνάμεις πάνω του. Με άλλα λόγια είναι ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Όπως στο παρακάτω σχήμα.



Ο μετασχηματισμός από το σύστημα Ο στο σύστημα Ο' είναι ο μετασχηματισμός Galileo:

$$x' = x - vt \tag{1}$$
$$y' = y \tag{2}$$
$$z' = z \tag{3}$$
$$t' = t \tag{4}$$

όπου υποθέτουμε ότι οι άξονες ταυτίζονται την $t_0 = 0$ και η ταχύτητα έχει την κατεύθυνση του x άξονα. Οι εξισώσεις αυτές μοιάζουν απόλυτα σωστές. Και είναι πράγματι, αν δεχθούμε ως αυτονόητα τα προηγούμενα αξιώματα.

Ο Galileo πρόσθεσε (έμμεσα) και μία ακόμα:

Αξίωμα. 1.3 *Αρχή της κλασσικής σχετικότητας. Όλοι οι νόμοι της μηχανικής είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.*

Πράγματι αν ένα σώμα δέχεται δύναμη $\vec{F}(\vec{x})$ στο σύστημα O, και δεχθούμε ότι η δύναμη είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό Galileo, άρα $\vec{F}'(\vec{x}') = \vec{F}(\vec{x})$, τότε ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα έχει την ίδια μορφή και στο σύστημα O'.

Πρώτα ας δούμε πως μετασχηματίζεται η τυχαία ταχύτητα $\vec{u}$ που έχει ένα το σώμα ως προς το O.

$$u'_{\parallel} = \frac{dx'_{\parallel}}{dt'} = \frac{d(x_{\parallel} - vt)}{dt} = u_{\parallel} - v \tag{5}$$

$$\vec{u}'_{\perp} = \frac{d\vec{x}'_{\perp}}{dt'} = \frac{d\vec{x}_{\perp}}{dt} = \vec{u}_{\perp} \tag{6}$$

Αυτός είναι απλά ο συνηθισμένος τρόπος σύνθεσης των ταχυτήτων

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \tag{7}$$

Η επιτάχυνση τώρα στο O' σύστημα θα είναι:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt'} = \frac{d(\vec{u} - \vec{v})}{dt} = \vec{a} \tag{8}$$

Έτσι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα έχει την ίδια μορφή στα δύο συστήματα αφού η μάζα είναι και αυτή αναλλοίωτη $m' = m$.

$$\vec{F}'(\vec{x}') = m\vec{a}' \leftrightarrow \vec{F}(\vec{x}) = m\vec{a} \tag{9}$$

Ο Νεύτωνας μας έδωσε ένα σύνολο νόμων για τη μηχανική που φάνταζε αδιαπραγμάτευτο. Η φυσική έγινε μία τετριμμένη επιστήμη όπου τίποτα άλλο δεν θα μπορούσε να ανακαλυφθεί. Και κάπως έτσι φτάσαμε στον Maxwell.

2 Μετά τον Maxwell

2.1 Ηλεκτρομαγνητικό κύμα

Αυτός μας έδωσε ένα νέο σύνολο εξισώσεων:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{10}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{11}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{12}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \tag{13}$$

Από αυτές σε περιοχές μακριά από πηγές, όπου $\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$, μπορούμε να οδηγηθούμε[†] σε δύο κυματικές εξισώσεις, μία για το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και μία για το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{14}$$

και

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{15}$$

Αν τις συγκρίνουμε με την γενική εξίσωση κύματος

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

βλέπουμε ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό κύμα (που τελικά αν και δεν φαίνεται από τις παραπάνω είναι αλληλένδετα) έχουν ταχύτητα διάδοσης

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \tag{17}$$

που είναι και η γνωστή μας ταχύτητα και του φωτός.

2.2 Και ιδού το πρόβλημα...

Όμως οι κυματικές εξισώσεις παραπάνω δεν περιέχουν καμία ένδειξη για το *ποιό σύστημα αναφοράς προτιμούν*. Ούτε φαίνεται να επηρεάζονται από την κίνηση της πηγής που τα δημιούργησε. Οι εξισώσεις είναι αμείλικτες: θέλουν να δημιουργήσουν κύμα που να διαδίδεται με c. Αρχικά υπέθεσαν ότι υπάρχει ένα προτιμητέο σύστημα αναφοράς για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, στο οποίο διαδίδεται με ταχύτητα c, το σύστημα του ακίνητου αιθέρα. Η Γη κινείται ως προς αυτό, οπότε η μετρούμενη ταχύτητα c' ως προς τη Γη θα είναι διάφορη του c και μάλιστα από τον νόμο (7) θα είναι $c' = c - v$, μία σχέση που μπορούμε να αξιοποιήσουμε για να βρούμε την απόλυτη ταχύτητα v κάθε συστήματος αναφοράς. Η κλασσική αρχή της σχετικότητας (1.3) καταρρίπτεται τραγικά...

Αρκεί βεβαίως να μετρηθεί μία ταχύτητα φωτός $c' \neq c$.

Τα πειράματα όμως, ξεκινώντας από τους Michelson-Morley, έδειξαν ότι $c' = c$ ανεξάρτητα από την θέση της Γης γύρω από τον Ήλιο, ανεξάρτητα δηλαδή από την ταχύτητά μας μέσα στον υποτιθέμενο αιθέρα. Οι εξισώσεις είναι όντως αμείλικτες...

3 Einstein

3.1 Αξιώματα ειδικής σχετικότητας

Χρειάζεται απλώς τόλμη. Ας υποθέσουμε ότι το φως όντως κινείται πάντα με ταχύτητα c στο κενό. Ανεξάρτητα από τη σχετική κίνηση του παρατηρητή στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Τί συνέπειες έχει αυτό;

Κατ' αρχάς είναι συνεπές με την (1.3) την αρχή της κλασσικής σχετικότητας. Και μάλιστα την αναβαθμίζει κατά ένα επίπεδο:

Αξίωμα. 3.1 *Αρχή της ειδικής σχετικότητας. Όλοι οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.*

Δεν εξαιρείται ούτε ο ηλεκτρομαγνητισμός, ούτε το φως. Δέν υπάρχουν προνομιούχοι αδρανειακοί παρατηρητές. Ο Κόσμος διέπεται από μία βαθιά ισονομία.

Αυτή από μόνη της η αρχή είναι ικανή να παράγει το επόμενο λήμμα, που συχνά αναφέρεται ως δεύτερο αξίωμα της σχετικότητας:

Λήμμα. 3.1 *Το φως έχει την ίδια ταχύτητα c ως προς όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.*

Σύμφωνα με την αρχή αυτή αν φως παραχθεί την $t = 0$ στην αρχή των αξόνων του Ο (που στιγμιαία ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων του Ο') σε χρόνο t το φως θα έχει φτάσει στα σημεία που επαληθεύουν την $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$. Στο άλλο σύστημα Ο' θα ισχύει επίσης $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$

Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$ είναι αναλλοίωτη. Είναι μία ποσότητα που αξίζει ένα σύμβολο και ένα όνομα μια και πρόκειται για θεμελιώδη ποσότητα. Ορίζουμε λοιπόν **διάστημα** (interval)

$$S = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{18}$$

3.2 Μετασχηματισμοί Lorentz

Αν απαιτήσουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό από το O στο O' σύστημα, που να μήν επηρεάζει τις κάθετες στην ταχύτητα διευθύνσεις ($y' = y,\ z' = z$) και να διατηρεί αναλλοίωτο το S προκύπτει με λίγη άλγεβρα ο **μετασχηματισμός Lorentz**:

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{19}$$
$$y' = y \tag{20}$$
$$z' = z \tag{21}$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{22}$$

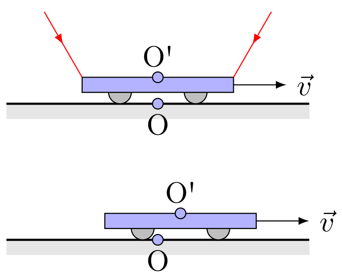
Έχουμε χρησιμοποιήσει τη γνωστή σύμβαση $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Οι εξισώσεις του Maxwell είναι αναλλοίωτες στον μετασχηματισμό Lorentz (αν και δεν τους φαίνεται). Πολλοί όμως άλλοι γνωστοί μας νόμοι δεν είναι και θέλουν τροποποίηση. Αλλά πρώτα θέλουν τροποποίηση μερικές βασικές έννοιες. Ας πούμε ο απόλυτος χρόνος. Όπως βλέπουμε από την (22) ο χρόνος του O' είναι διαφορετικός από αυτόν του O. Εξαρτάται από την ταχύτητά του αλλά και από την θέση x. Αυτά φαίνονται καλύτερα αν οι εξισώσεις του μετασχηματισμού γραφούν (για το x και το t)

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \tag{23}$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \tag{24}$$

Όπως έγραψε κάποιος "Η σχετικότητα δεν είναι δύσκολο να την καταλάβεις. Είναι δύσκολο να την πιστέψεις". Ας δούμε μερικές από τις συνέπειές της. Πρώτα ένα gedanken πείραμα (σκέψης) του Einstein.

Ας υποθέσουμε ότι οι δύο παρατηρητές O και O' βρίσκονται στην ίδια θέση (περίπου) τη στιγμή που (σύμφωνα με τον O) δύο ταυτόχρονοι κεραυνοί χτυπούν τις άκρες της πλατφόρμας. Ο παρατηρητής O θα δει ταυτόχρονα το φως (μετά από χρόνο $d/2c$, αν d το μήκος της πλατφόρμας).



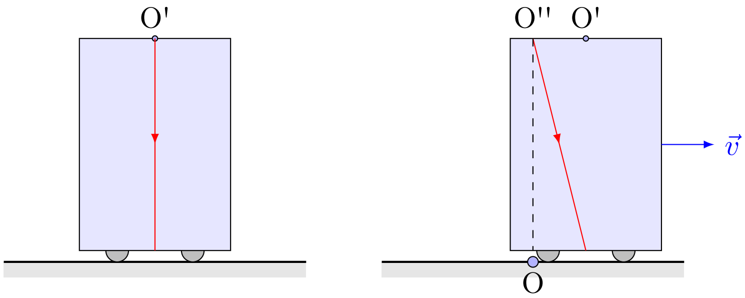
Ο παρατηρητής O' όμως πρώτον θα δει το φως πριν από τον O από τη δεξιά πλευρά της πλατφόρμας και μετά από την αριστερή πλευρά της. Και, δεύτερον, γι' αυτόν η πτώση των κεραυνών δέν είναι ταυτόχρονη. Κι αυτό γιατί η ταχύτητα του φωτός που μετράει ο O' είναι πάλι c, άρα το φως από την αριστερή πλευρά πρέπει να διανύσει μεγαλύτερο διάστημα. Το ταυτόχρονο των γεγονότων δέν ισχύει πλέον. 'Η τουλάχιστο δεν ισχύει για όλους το ίδιο. *Εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς.*

Τα ίδια μας δείχνουν οι τύποι (23). Αν $\Delta t = 0$ για τον O τότε $\Delta t' = -\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x \neq \Delta t$

Η τολμηρή υπόθεση του Einstein δυστυχώς κατέρριψε το αξίωμα (1.1) του απόλυτου χρόνου. Ο χρόνος είναι πλέον σχετικός και εξαρτάται από την κίνησή μας.

3.3 Διαστολή χρόνου

Θεωρήστε μία άλλη περίπτωση. Στο αριστερό σχήμα φαίνεται ένα βαγόνι που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς την Γη. Στο σύστημα αναφοράς του βαγονιού, μία ακτίνα φωτός laser εκπέμπεται από την κορυφή O' και φτάνει στο κέντρο του πατώματος σε χρόνο $\Delta t' = d/c$.



Στο δεύτερο σχήμα φαίνεται αυτό που βλέπει ο παρατηρητής στη Γη. Το φως γι αυτόν πρέπει να διανύσει μεγαλύτερη απόσταση, και αφού η ταχύτητά του είναι σταθερή c θα κάνει περισσότερο χρόνο. Έτσι ο χρόνος που παρατηρεί το ίδιο φαινόμενο ο παρατηρητής O είναι μεγαλύτερος από τον χρόνο του O'.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο που σχηματίζει η ακτίνα φωτός όπως τη βλέπει ο O, η κάθετη από το O'' και το έδαφος του βαγονιού έχουμε:

$$(c\Delta t)^2 = d^2 + (v\Delta t)^2 \Leftrightarrow \Delta t = \frac{d}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$
$$\Delta t = \frac{d}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$\Delta t = \gamma \Delta t' \tag{25}$$

Η σχέση (25) μας δίνει πόσο ακριβώς μεγαλύτερος είναι ο χρόνος που αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής να συμβαίνουν τα γεγονότα στο κινούμενο σύστημα αναφοράς: γ φορές μεγαλύτερος. Για ταχύτητα $v = 0.99c$ έχουμε $\gamma \simeq 7$. Για $v \to c$ $\gamma \to \infty$. Ο ακίνητος παρατηρητής βλέπει τον χρόνο του κινούμενου παρατηρητή να διαστέλλεται. Το φαινόμενο λέγεται ακριβώς έτσι: **διαστολή χρόνου** (time dilation) και οφείλεται στην ίδια την φύση του χρόνου. Αντί για μία φωτεινή ακτίνα θα μπορούσαμε να είχαμε δύο οποιαδήποτε γεγονότα στο κινούμενο σύστημα: τη γένεση και τη διάσπαση ενός στοιχειώδους σωματιδίου, δύο διαδοχικές συσπάσεις της ανθρώπινης καρδιάς, την αιώρηση ενός εκκρεμούς κ.τ.λ. Όλα αυτά φαίνονται από το ακίνητο σύστημα να επιβραδύνονται.

3.4 Συστολή μήκους

Ας φανταστούμε μία ράβδο ακίνητη πάνω στον x' άξονα στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή O'. Το μήκος γι' αυτόν είναι $L' = \Delta x'$ και ονομάζεται *ιδιομήκος*. Την ίδια ράβδο μετράει ο παρατηρητής O στο ακίνητο σύστημα αναφοράς της Γης (αν και παραβιάζουμε λίγο τη σχετικότητα όταν λέμε ακίνητο σύστημα αναφοράς). Αυτός για να μετρήσει το μήκος της δεν έχει παρά να αφαιρέσει τη τελική θέση από την αρχική θέση της ράβδου όπως τη βλέπει στο σύστημά του *την ίδια χρονική στιγμή*. Συνεπώς γι' αυτόν $\Delta L = \Delta x$ και $\Delta t = 0$. Από την σχέση (23) έχουμε

$$\Delta x' = \gamma \Delta x$$
$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} \tag{26}$$

δηλαδή $L = \dfrac{L'}{\gamma}$. Ο παρατηρητής μετράει το μήκος της κινούμενης ράβδου μικρότερο από το ιδιομήκος της. Αυτή είναι η λεγόμενη *συστολή μήκους* ή Lorentz-FitzGerald contraction.

4 Minkowski

Εφεξής, ο χώρος από μόνος του και ο χρόνος από μόνος του είναι καταδικασμένοι να ξεθωριάσουν σε απλές σκιές και μόνο ένα είδος συνένωσής τους θα διατηρήσει μια αυτόνομη υπόσταση.

Hermann Minkowski, 1908

4.1 Χώρος Minkowski

Όπως είδαμε παραπάνω η ειδική σχετικότητα παράγεται αναπόδραστα από την απαίτηση της ισοδυναμίας των παρατηρητών και την επακόλουθη σταθερή ταχύτητα του φωτός σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αυτό οδηγεί στο αναλλοίωτο του διαστήματος S.

Στον τύπο του διαστήματος $S = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ οι χωρικές συντεταγμένες αντιμετωπίζονται διαφορετικά από ότι η χρονική συντεταγμένη. Αυτή έχει ένα μείον πρόσημο αλλά και το c. Επίσης συνηθίζεται στη βιβλιογραφία (ιδίως σε θεωρητικούς υψηλών ενεργειών) και η εντελώς ανάποδη γραφή $S = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Αυτό δεν αλλάζει την φυσική (την ουσία) αν και δημιουργεί μερικές αλλαγές προσήμων σε διάφορους τύπους.

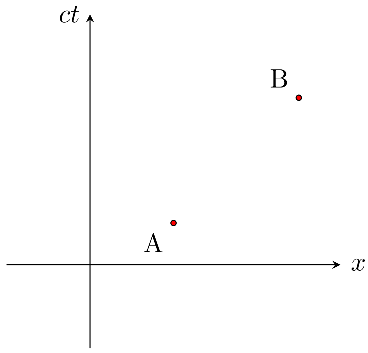
Ο Minkowski το 1907 είχε την ιδέα να μεταχειριστεί και τον χρόνο ως μία ακόμα συντεταγμένη. Για να φανεί ο ισοδύναμος χαρακτήρας των συντεταγμένων τις ονομάζουμε όλες διαφορετικά. Γράφουμε $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$. (Προσοχή: οι αριθμοί πάνω δεν είναι εκθέτες). Ορίζουμε έτσι τη θέση στον τετραδιάστατο χωροχρόνο, που ονομάστηκε *χώρος Minkowski*, με το τετραδιάνυσμα θέσης ως

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{27}$$

Ένας παλιότερος τρόπος γραφής ήταν ο ορισμός $x^0 = ict$. Τότε το διάστημα αποκτά μόνο του το μείον πρόσημο λόγο της φανταστικής μονάδας $i^2 = -1$. Αλλά καλύτερα να σκεφτόμαστε με διανύσματα x^μ

4.2 Χωροχρονικά διαγράμματα

Σε τέσσερις διαστάσεις είναι λίγο δύσκολο να φανταστούμε σημεία. Γι' αυτό περιοριζόμαστε στις δύο x, y και μία για τον χρόνο. Συνήθως μόνο το x και ο χρόνος... Ένα σημείο στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνει ένα γεγονός.



Το διάστημα S μεταξύ των γεγονότων Α και Β ορίζεται

$$S = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{28}$$

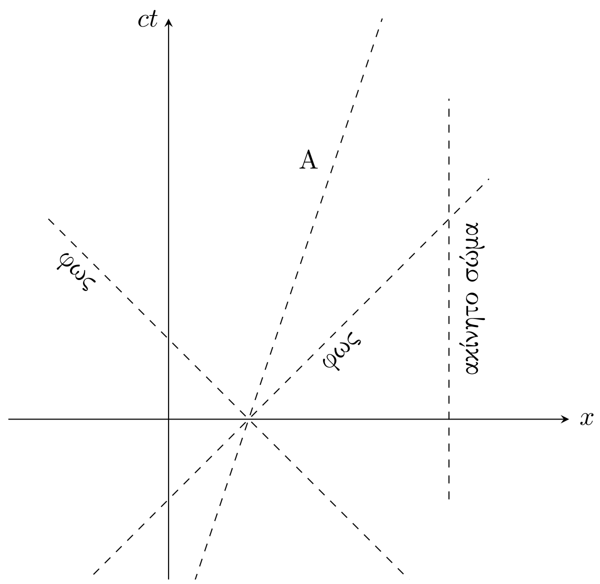
και έχει την θεμελιώδη διαφορά με τον Ευκλείδειο χώρο ότι εδώ είναι ένας αριθμός θετικός, αρνητικός ή μηδέν. Ανάλογα με το πρόσημό του τα γεγονότα λέμε είναι χωροειδή, χρονοειδή ή φωτοειδή.

$$S = \begin{cases} +, & \textbf{χωροειδές} \\ -, & \textbf{χρονοειδές} \\ 0, & \textbf{φωτοειδές} \end{cases} \tag{29}$$

Η γεωμετρία του χώρου Minkowski εξ' αιτίας αυτού του προσήμου έχει ίσως πλουσιότερη δομή από τη γνωστή μας Ευκλείδεια.

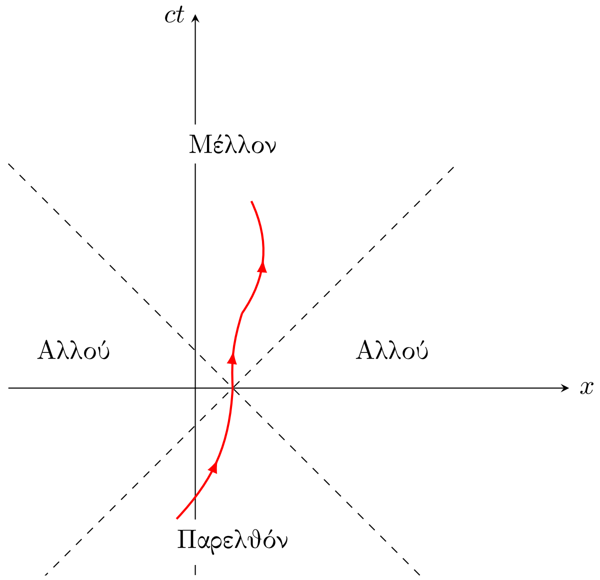
4.2.1 Κοσμικές γραμμές

Η τροχιά σε ένα τέτοιο χωροχρονικό διάγραμμα ονομάζεται *κοσμική γραμμή* (world line). Ένα ακίνητο σώμα σε κάποιο σημείο του x άξονα έχει μία κοσμική γραμμή παράλληλη στον άξονα του χρόνου. Μία φωτεινή πηγή δημιουργεί ακτίνες φωτός που επειδή κινούνται πάντα με c έχουν κλίση $45°$, όταν κινούνται προς τα θετικά του άξονα και $135°$ όταν κινούνται προς τα αρνητικά. Ένα κινούμενο αντικείμενο έχει μία κοσμική γραμμή με κλίση $135° < \theta < 45°$, ενώ ένα ακίνητο σώμα έχει μία κατακόρυφη κοσμική γραμμή.



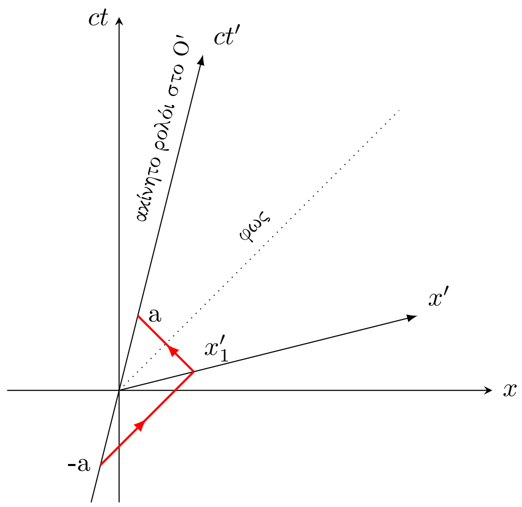
4.2.2 Κώνοι φωτός

Επειδή $v < c$ για κάθε υλικό σώμα, που συνεπάγεται $135° < \theta < 45°$, η κοσμική γραμμή βρίσκεται πάντα μέσα σε ένα κώνο (στον xyt, και υπερκώνο στον $xyzt$ χώρο) που ορίζεται από τις κοσμικές γραμμές του φωτός που ξεκινούν από το σώμα μία δεδομένη στιγμή, και ονομάζεται *κώνος φωτός*. Το πάνω μέρος του κώνου αποτελεί το απόλυτο μέλλον του σώματος ενώ το κάτω μέρος το απόλυτο παρελθόν του. Τα γεγονότα που περιλαμβάνονται στο μέλλον είναι όλα τα γεγονότα με τα οποία *δύναται* να επικοινωνήσει, ενώ στον παρελθοντικό κώνο περιλαμβάνονται όλα τα γεγονότα τα οποία *θα μπορούσαν* να αλληλεπιδράσουν με το σώμα. Ενδιαφέρον έχει και η περιοχή εκτός του υπερκώνου. Αυτή περιλαμβάνει γεγονότα με τα οποία το σώμα *αδυνατεί* να επικοινωνήσει και ονομάζεται *απρόσιτη περιοχή, ή αλλού.*

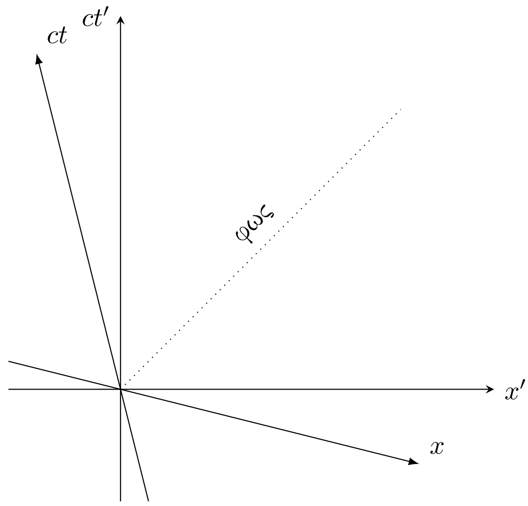


Όλα τα σημεία που περιλαμβάνει το μέλλον του σώματος κάθε χρονική στιγμή είναι χρονοειδώς διαχωρισμένα από αυτό, ενώ όλα τα σημεία που βρίσκονται στην απρόσιτη περιοχή του είναι χωροειδώς διαχωρισμένα. Όλα τα σημεία του παρελθόντος του, επίσης είναι χρονοειδώς διαχωρισμένα από αυτό.

Για να βρούμε τον άξονα του χρόνου του κινούμενου συστήματος O' όπως φαίνεται από το ακίνητο O δεν έχουμε παρά να αφήσουμε ένα ρολόι στο $x' = 0$. Η κοσμική του γραμμή είναι ο άξονας ct'. Αν το O' κινείται όπως θεωρούμε συνήθως με θετική ταχύτητα v στην x διεύθυνση, ο άξονας ct' σχηματίζει γωνία θ με τον ct, τέτοια ώστε $\tan\theta = \frac{v}{c} = \tan\beta$. O x' άξονας θα βρεθεί από τον O' παρατηρητή ως εξής: κάποια χρονική στιγμή (-a) εκπέμπει μία ακτίνα φωτός από την αρχή των αξόνων του η οποία ανακλάται στο σημείο x'_1 και επιστρέφει στο ίδιο σημείο σε χρόνο a. Στο σύστημα O ο άξονας x' θα είναι λοιπόν στραμμένος κι αυτός με την ίδια γωνία θ αλλά με την ανάποδη φορά. Η ακτίνα φωτός είναι ξανά διχοτόμος της γωνίας των αξόνων ct' και x'.



Η άποψη του παρατηρητή O' είναι ότι αυτός είναι ακίνητος και ο O κινείται με ταχύτητα $-v$. Το χωροχρονικό διάγραμμα του O όπως φαίνεται από τον O' είναι κάπως έτσι:



Και πάλι οι άξονες σχηματίζουν γωνία θ με $\tanh\theta = \beta$, $\cosh\varphi = \gamma$, $\sinh\varphi = \beta\gamma$. Ας σημειωθεί ότι η γωνία αυτή θ ονομάζεται rapidity, ένας όρος που μεταφράζεται υπέροχα στη γλώσσα μας με τον όρο *ωκύτητα* από το Ομηρικό *ωκύς*=ταχύς. Από αυτές τις σχέσεις ο μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να γραφεί και ως μία (υπερβολική) στροφή:

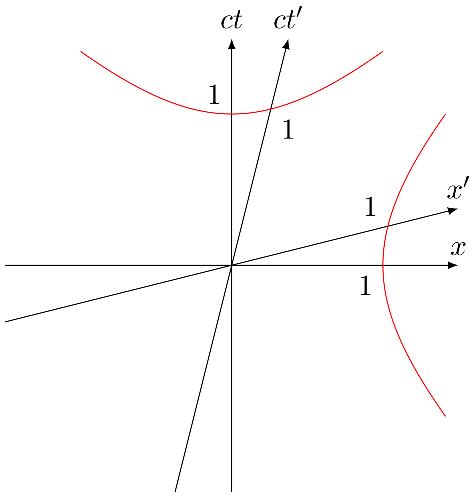
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi & 0 & 0 \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{30}$$

Απομένει τώρα η εύρεση των μονάδων των αξόνων.

4.2.3 Μία υπερβολική γεωμετρία...

Στη γνωστή μας Ευκλείδεια γεωμετρία ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχει σταθερή απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι ένας κύκλος. Στην γεωμετρία Minkowski όμως αυτός ο γεωμετρικός τόπος, όπου S=σταθερό, είναι μία *υπερβολή*. Κατά τη ρήση ενός Μαθηματικού, η τελειότερη καμπύλη είναι η υπερβολή! Ταιριάζει γάντι στον λαό που τιμά το *μέτρο* αλλά λατρεύει τα *άκρα*...

Ας θεωρήσουμε την υπερβολή (στο x, ct) με $S = -1$, δηλαδή με εξίσωση $-(ct)^2 + x^2 = -1$. Αυτή φαίνεται στο σχήμα και διέρχεται από το σημείο 1 του άξονα ct. Οι μετασχηματισμοί Lorentz αφήνουν αναλλοίωτο το S οπότε το σημείο που τέμνει η υπερβολή αυτή τον άξονα ct' θα πρέπει να είναι *το δικό του* 1.



Όμοια και για τον άλλον άξονα του x'. Εδώ η υπερβολή είναι η $-(ct)^2 + x^2 = 1$ και το διάστημα S έχει θετική τιμή 1. Παρατηρούμε ότι οι μονάδες χρόνου και μήκους του κινούμενου συστήματος O' φαίνονται μεγαλύτερες από το ακίνητο σύστημα O. Το ίδιο και για τις μονάδες του x' άξονα.

4.2.4 Διαστολή χρόνου από τα διαγράμματα

Συγκεκριμένα το $ct' = 1$ έχει συντεταγμένη στο O σύστημα

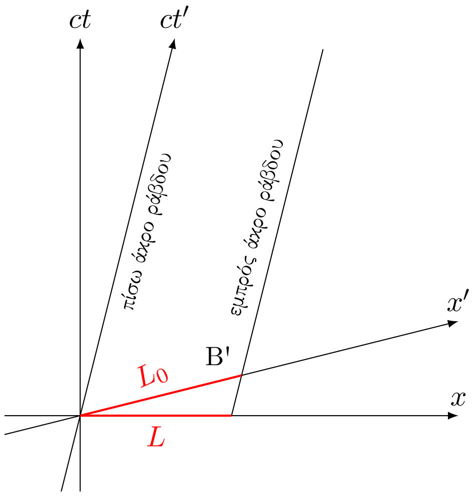
$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{31}$$

που βρίσκεται άν λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 - t^2 = -1 \\ t = (\cot\theta)x \end{cases} \tag{32}$$

Γενικότερα $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t'$ που είναι απλώς η διαστολή χρόνου που παρατηρεί ο ακίνητος για τον κινούμενο παρατηρητή, όπως αποδεικνύεται από τα διαγράμματα.

4.2.5 Συστολή μήκους από τα διαγράμματα



Στο παραπάνω σχήμα ο παρατηρητής O βλέπει ράβδο μήκους L (στο σύστημά του) που κινείται με ταχύτητα v. Η ράβδος ηρεμεί στο O' σύστημα με το ένα της άκρο στην αρχή του άξονα x', όπου το μήκος της είναι L_0. Από το σχήμα $L_0 > L$. Σωστά. Μόνο που το πραγματικό της μήκος πρέπει να μετρηθεί στο σύστημα O' που αυτή ηρεμεί. Εξάλλου αυτό ονομάσαμε *μήκος ηρεμίας = ιδιομήκος*. Η κοσμική γραμμή του πίσω άκρου της είναι ο άξονας ct' ενώ το εμπρός άκρο της έχει μία κοσμική γραμμή BB' με κλίση ίδια με του άξονα ct', δηλαδή $\tan(\pi - \theta)$. Τα υπόλοιπα είναι απλή άσκηση γεωμετρίας.

Η x συντεταγμένη του B' είναι $x_{B'} = \dfrac{L_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, η χρονική του συντεταγμένη $t_{B'} = \dfrac{\beta L_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

και η $\Delta x/\Delta t = \tan\theta = \beta$. Επομένως:

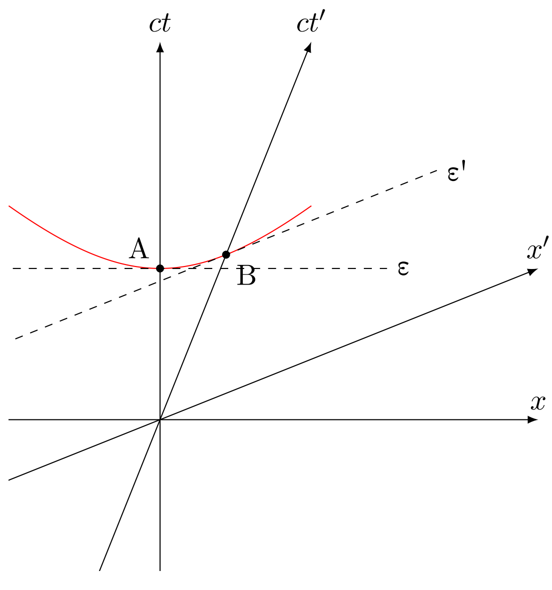
$$\frac{x_{B'} - x_B}{t_{B'} - 0} = \frac{v}{c} \Leftrightarrow x_{B'} - x_B = \beta t_{B'} \Leftrightarrow x_B = x_{B'} - \beta t_{B'}$$
$$x_B = \frac{L_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2 L_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow x_B = \sqrt{1-\beta^2} L_0$$
$$L = \frac{L_0}{\gamma} \tag{33}$$

Η παρατήρηση του Ο για το μήκος της ράβδου είναι γ φορές μικρότερη από το ιδιομήκος L_0.

4.3 Ταυτόχρονο

Το ότι η έννοια του απόλυτου χρόνου καταβαραθρώθηκε από την ειδική σχετικότητα αυτό δεν είναι κάτι νέο. Ήδη από τις εξισώσεις (23) οι δύο (ισοδύναμοι) παρατηρητές δεν συμφωνούν μεταξύ τους για ταυτόχρονα γεγονότα. Άλλα ταυτόχρονα βλέπει ο ένας, άλλα ο άλλος. Και οι δύο έχουν δίκιο. Ο καθένας τους βλέπει αλλιώς τον χωροχρόνο.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται το ταυτόχρονο που βλέπει ο ακίνητος Ο. Είναι όλα τα σημεία που είναι κάθετα στον άξονα του χρόνου του t, και παράλληλα στον άξονά του x. Αυτή η γραμμή (ε) είναι επίσης εφαπτόμενη στην υπερβολή που διέρχεται από το σημείο Α. Ο άλλος παρατηρητής όμως θεωρεί ταυτόχρονα τα γεγονότα που βρίσκονται πάνω στη δική του εφαπτομένη της ίδιας καμπύλης στο σημείο που τέμνει τον δικό του άξονα t', στο σημείο Β. Είναι απλή άσκηση διαφορικού λογισμού να βρεθεί η παράγωγος της υπερβολής στο σημείο Β. Ο υπολογισμός δίνει κλίση ευθείας (ε') $\tan\theta$, ίση με την κλίση του άξονα x'. Δηλαδή το ταυτόχρονο για τον Ο' είναι ευθείες παράλληλες στον δικό του άξονα x'.

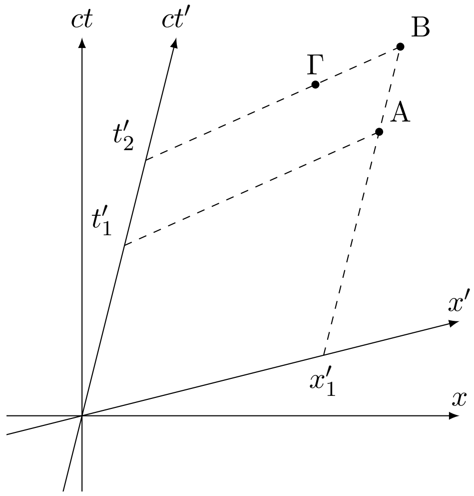


Δεν υπάρχει πλέον ταυτόχρονο με την έννοια του απόλυτου χρόνου του Newton. Θα χρειαστούμε αιώνες όμως για να το χωνέψουμε. Έχουμε βέβαια το δικαιολογητικό των μικρών ταχυτήτων, οπότε $\beta \to 0$...

Είναι όντως παράξενο και δύσκολο στη συνειδητοποίηση το ότι αυτά που βλέπεις γύρω σου να γίνονται ταυτόχρονα σε διαφορετικές θέσεις, κάποιος άλλος μπορεί να τα βλέπει με διαφορετική χρονική σειρά. Και αν σκεφτούμε ότι γεγονότα που εμείς τα βλέπουμε να συμβαίνουν με την αλληλουχία Α $\to$ Β κάποιος σε κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς μπορεί να τα βλέπει με την ανάποδη ακολουθία Β $\to$ Α, τότε τα πράγματα γίνονται ολίγον εξωφρενικά...

Και περισσότερο επικίνδυνα.

Δύο γεγονότα Α και Β που είναι χρονοειδώς διαχωρισμένα, δηλαδή γι' αυτά $S < 0$, μπορούν πάντα να συμβούν στο ίδιο σημείο με κάποιο κατάλληλο μετασχηματισμό Lorentz. Όμοια δύο γεγονότα που είναι χωροειδώς διαχωρισμένα μπορούν πάντα να θεωρηθούν ταυτόχρονα σε ένα καταλλήλως κινούμενο σύστημα αναφοράς. Για παράδειγμα δείτε τα σημεία Α, Β και Γ στο παρακάτω σχήμα.



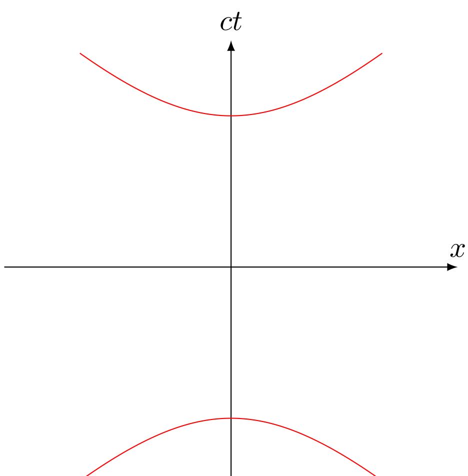
Τα (χρονοειδώς διαχωρισμένα) γεγονότα Α και Β συμβαίνουν στο ίδιο σημείο για τον παρατηρητή Ο'. Όχι όμως και για τον Ο. Τα (χωροειδώς διαχωρισμένα) γεγονότα Γ και Β συμβαίνουν ταυτόχρονα για τον Ο'. Αν έτρεχε με λίγο μεγαλύτερη ταχύτητα θα παρατηρούσε πρώτα το Β και μετά το Γ, αντίθετα από τη σειρά που τα παρατηρεί ο Ο. Αν τα γεγονότα Β και Γ είναι το ένα το αίτιο του άλλου τότε έχουμε πρόβλημα. Μεγάλο πρόβλημα. Το αποτέλεσμα θα προηγείται της αιτίας. Η λογική καταρρέει.

Αλλά ευτυχώς δεν είναι έτσι. Χωροειδώς διαχωρισμένα γεγονότα δέν μπορούν να έχουν σχέση αίτιου-αποτελέσματος, αφού ο κώνος φωτός του ενός *δέν περιλαμβάνει το άλλο*. Η πληροφορία δεν μπορεί να διαδοθεί με υπερφωτεινές ταχύτητες, γιατί άν μπορούσε θα έπρεπε να μάθουμε να ζούμε με μερικά μεγάλα παράδοξα: ένα σωμάτιο θα μπορούσε να διασπαστεί πριν παραχθεί, ή ένας άνθρωπος να πεθάνει πριν γεννηθεί...

Χρονοειδώς διαχωρισμένα γεγονότα από την άλλη μπορούν να παρατηρηθούν στην ίδια θέση ή και να αλλάξουν θέσεις στο νέο σύστημα αναφοράς, αλλά όχι και χρονική αλληλουχία. Ευτυχώς η αιτιότητα διατηρείται. Ή έτσι θέλουμε να πιστεύουμε...

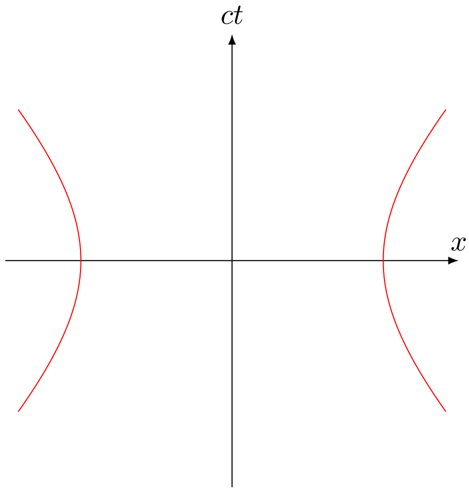
4.4 Αιτιότητα;

Ας ξαναγυρίσουμε λίγο στα υπερβολοειδή. Η εξίσωση $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = S$ παριστάνει ένα υπερβολοειδές στον τετραδιάστατο χωροχρόνο. Αν παραλείψουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) την συντεταγμένη z μπορούμε να φανταστούμε, και να ζωγραφίσουμε, τα υπερβολοειδή αυτά.



Δίχωνο υπερβολοειδές

$S < 0$



Μονόχωνο υπερβολοειδές

$S > 0$

Στο σχήμα φαίνονται βέβαια οι υπερβολές, αλλά τα υπερβολοειδή σχηματίζονται εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα του χρόνου. Στο αριστερό σχήμα θα σχηματιστεί ένα υπερβολοειδές δύο φύλλων, ενώ στο δεξί ενός φύλλου.

Για ένα γεγονός που βρίσκεται στο πάνω φύλλο του δίχωνου υπερβολοειδούς, οποιοσδήποτε μετασχηματισμός Lorentz μεταβάλλει τη θέση του σημείου όμως το νέο σημείο θα βρίσκεται πάλι στην ίδια υπερβολή, γιατί το S είναι αναλλοίωτο κατά τους μετασχηματισμούς Lorentz. Αν ο μετασχηματισμός περιέχει και τις συνηθισμένες στροφές στον xyz χώρο τότε μπορούμε να μεταβούμε σε οποιοδήποτε σημείο του άνω φύλλου, σε οποιαδήποτε υπερβολή του. Όμως δεν είναι δυνατό να μεταβούμε σε σημείο του κάτω φύλλου γιατί αυτά *δεν συνδέονται με κάποια υπερβολή*.

Όλοι οι παρατηρητές θα συμφωνήσουν ότι ένα γεγονός που ανήκει στο πάνω φύλλο έγινε αμετάκλητα μετά το γεγονός της αρχής των αξόνων. Αμετάκλητα μετά οποιοδήποτε γεγονός του κάτω φύλλου.

Αντίθετα για ένα γεγονός στο μονόχωνο υπερβολοειδές με κατάλληλο μετασχηματισμό Lorentz μπορούμε να μεταβούμε σε οποιοδήποτε σημείο του φύλλου. Εδώ οι παρατηρητές δεν συμφωνούν με τη χρονική αλληλουχία των γεγονότων. Ευτυχώς όμως το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι χωροειδώς διαχωρισμένο από την αρχή. Δεν μπορεί να έχει αιτιώδη συνάφεια με το γεγονός της αρχής των αξόνων, οπότε δεν πειράζει και τόσο αν κάποιοι παρατηρητές βλέπουν διαφορετικά την αλληλουχία...

Αλίμονο αν ήταν δυνατό να αλλάζει η χρονική σειρά για κάθε ζευγάρι γεγονότων.

Η *αιτιότητα* (casuality), η απαίτηση το αποτέλεσμα να έπεται της αιτίας δεν πρέπει να παραβιάζεται.

Στην πραγματικότητα *απαιτούμε* να ισχύει η αιτιότητα, για να θεωρούμε το σύμπαν με τα μάτια της λογικής. Αν ισχύει, τότε *τίποτα δεν μπορεί να διαδοθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός.* Κανένα υλικό σώμα, καμία άυλη πληροφορία. Ας φανταστούμε, επί τούτου, ένα μιόνιο μ που παράγεται σε ένα σημείο x_1 του άξονα και διασπάται σε ένα άλλο σημείο x_2. Αν θεωρήσουμε ότι αυτό κινείται με ταχύτητα $v_\mu = \epsilon c$ με $\epsilon > 1$, τότε σε κάποιο άλλο κινούμενο σύστημα αναφοράς

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \tag{34}$$

Όμως $\Delta x = \epsilon c \Delta t$ και άρα

$$\Delta t' = \gamma \frac{\Delta x}{c}\left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{v}{c}\right) \tag{35}$$

Επειδή ισχύει $\frac{1}{\epsilon} < 1$ μπορούμε να διαλέξουμε το v του κινούμενου συστήματος ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{\epsilon} - \frac{v}{c} < 0 \tag{36}$$

χωρίς να υπερβούμε την ταχύτητα c του φωτός. Επομένως θα ισχύει $\Delta t' < 0$ και ο παρατηρητής στο κινούμενο σύστημα θα βλέπει τη διάσπαση πριν τη δημιουργία... Άτοπο (σύμφωνα με την απαίτηση της αιτιότητας), άρα η υπόθεση $\epsilon > 1$ δεν ισχύει. Συμπέρασμα: καμία πληροφορία δεν μπορεί να διαδοθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός, αν ισχύει η απαίτηση της αιτιότητας.

5 Τετρανύσματα, βαθμωτά, τανυστές και όλα αυτά...

5.1 Τετρανύσματα

Το τετράνυσμα (four-vector) x^μ μπορεί να παρασταθεί και με τον συνηθισμένο τρόπο ως διάνυσμα στήλης:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Με αυτόν τον τρόπο ο μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πινάκων:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Ο 4x4 πίνακας που περιέχει τον μετασχηματισμό Lorentz ορίζεται Λ^μ_ν, αν θεωρήσουμε τις μ γραμμές και ν τις στήλες του, και η προηγούμενη εξίσωση γράφεται πολύ κομψότερα:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \, x^\nu \tag{39}$$

Επαναλαμβανόμενοι (ίδιοι) δείκτες αθροίζονται χωρίς το σύμβολο της άθροισης $\sum$, (σύμβαση Einstein).

$$a_\nu b^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} a_\nu b^\nu \tag{40}$$

Κατά μία άλλη σύμβαση (του Eistein ξανά) χρησιμοποιούμε ελληνικά γράμματα $\mu, \nu, \ldots$ για να συμβολίσουμε τους αριθμούς 0,1,2,3 ενώ λατινικά γράμματα i, j ... για τους αριθμούς 1,2,3.

Η προηγούμενη εξίσωση (39) ορίζει τα υπόλοιπα τετρανύσματα. Ονομάζουμε (*ανταλλοίωτο*) διάνυσμα κάθε τετράδα αριθμών που μετασχηματίζεται όμοια με το x^μ.

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \, a^\nu \tag{41}$$

Ο (πίνακας) Λ^μ_ν έχει αντίστροφο $(\Lambda^{-1})^\nu_\mu$ για τον οποίο, εξ ορισμού, ισχύει

$$(\Lambda^{-1})^\nu_k \Lambda^k_\mu = \delta^\nu_\mu \tag{42}$$

Όπου το δ^ν_μ του Kronecker είναι 1 για $i = j$ και 0 για $i \neq j$.

Στον χώρο Minkowski ορίζεται το διάστημα S δύο γεγονότων ως

$$S = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{43}$$

Κατ' αναλογία ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = -a^0 b^0 + \vec{a} \cdot \vec{b} \tag{44}$$

όπου $\vec{a} \cdot \vec{b}$ το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Το εσωτερικό γινόμενο είναι ένα βαθμωτό (scalar), δηλαδή ένας αριθμός.

Αυτό υπονοεί ότι η μετρική μας $n_{\mu\nu}$ είναι $n_{00} = -1$, $n_{ii} = 1$ και $n_{ij} = 0,\ i \neq j$. Σε μορφή πίνακας

$$n_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

(Η μετρική n απαντάται και με τα αντίθετα πρόσημα).

Ένα διάνυσμα a_μ με δείκτη κάτω ονομάζεται *συναλλοίωτο* διάνυσμα. Αυτό είναι το δυϊκό του a^μ και είναι ίδιο με το διάνυσμα a^μ μόνο που η χρονική συνιστώσα του a_0 έχει το αντίθετο πρόσημο από την a^0. Η μετρική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ανεβάζει ή να κατεβάζει δείκτες, άρα είναι μία απεικόνιση των ανταλλοίωτων στα συναλλοίωτα διανύσματα.

$$a_\mu = n_{\mu\nu} a^\nu \tag{46}$$

Στην ουσία με τη συγκεκριμένη μετρική απλώς αλλάζουμε το πρόσημο στην χρονική συνιστώσα, όταν ανεβάζουμε ή κατεβάζουμε τον χρονικό δείκτη. Η μορφή της μετρικής φανερώνει ότι ο χώρος Minkowski είναι στην πραγματικότητα επίπεδος, με την έννοια ότι δεν είναι καμπύλος. Το εσωτερικό γινόμενο με τη χρήση της μετρικής γράφεται

$$a \cdot b \equiv n_{\mu\nu} a^\nu b^\mu \tag{47}$$

Ο μετασχηματισμός Lorentz των συναλλοίωτων διανυσμάτων είναι

$$a'_\mu = a_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \quad \left[= (\Lambda^{-1})^\nu_\mu a_\nu\right] \tag{48}$$

5.2 Βαθμωτά

Το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ είναι αναλλοίωτο κάτω από στροφές. Αυτό μας οδηγεί να σκεφτούμε ότι και *το εσωτερικό γινόμενο των τετρανυσμάτων πρέπει να είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.* Εξάλλου οι μετασχηματισμοί Lorentz μπορούν να περιέχουν και συνηθισμένες στροφές στον χώρο $\mathbb{R}^3$, και οι στροφές είναι κι αυτές μετασχηματισμός Lorentz (σε σύστημα με μηδενική ταχύτητα v). Πράγματι:

$$a'_\mu b'^\mu = a_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \Lambda^\mu_\rho b^\rho = a_\nu \delta^\nu_\rho b^\rho = a_\nu b^\nu = a_\mu b^\mu \tag{49}$$

όπου στο τελευταίο βήμα μετονομάσαμε τους επαναλαμβανόμενους δείκτες (που αθροίζονται) κατά το δοκούν, μιά και πρόκειται για *βωβούς* δείκτες (dummy indices), κάτι που έχουμε πάντα δικαίωμα να κάνουμε.

Το εσωτερικό γινόμενο είναι λοιπόν ένα βαθμωτό αναλλοίωτο στους μετασχηματισμούς Lorentz. Διατηρεί την ίδια ακριβώς μορφή σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

5.3 Τανυστές

Έχοντας ορίσει τετρανύσματα και μετρικές είναι ένα απλό βήμα να πάμε και λίγο παραπάνω. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε ποσότητες με δύο, τρεις και περισσότερους δείκτες, που ονομάζονται *τανυστές* (tensors). Ένας τανυστής με δύο δείκτες είναι, στον χώρο Minkowski των τεσσάρων διαστάσεων, μία συλλογή 16 στοιχείων που ακολουθεί τον μετασχηματισμό Lorentz.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \tag{50}$$

Όμοια ορίζεται και ένας τανυστής με κάτω δείκτες:

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu F_{\rho\sigma} \tag{51}$$

Η μετρική $n_{\mu\nu}$ και το δέλτα δ^{ν}_{μ} είναι παραδείγματα τανυστών, αν και όχι τόσο καλά μιά και το δέλτα διατηρεί την ίδια μορφή και σε καμπύλους χώρους, πράγμα που δεν ισχύει για άλλους τανυστές.

Μπορεί να δειχθεί επίσης ότι η ποσότητα $F_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ είναι επίσης αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς Lorentz. Επίσης είναι ένας τανυστής μηδενικής τάξης δηλαδή ένας απλός αριθμός. Γενικά όταν αθροίζουμε δείκτες σε τανυστές (διαδικασία που λέγεται συστολή, contraction) κατεβάζουμε την τάξη τους. Η ποσότητα π.χ. $F_{\mu\nu}a^{\mu}$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα οπότε μπορεί να γραφεί $b_{\nu} = F_{\mu\nu}a^{\mu}$.

Στην προηγούμενη φαίνεται επίσης και κάτι άλλο, που αξίζει να αναφερθεί ρητά: ενώ οι βουβοί δείκτες δεν μας νοιάζει πώς ονομάζονται, η θέση και το όνομα των ελευθέρων δεικτών πρέπει να ταιριάζει στο αριστερό και δεξί μέλος μίας εξίσωσης.

5.4 Το συναλλοίωτο

Και γιατί όλα αυτά; θα αναρωτηθεί κάποιος. Δεν μας φτάνει τόση διανυσματική ανάλυση πρέπει να κάνουμε τα πράγματα περισσότερο πολύπλοκα εφευρίσκοντας όλο και ποιο αφηρημένους συμβολισμούς...

Η απάντηση είναι στην (3.1). Η αρχή αυτή μας υποχρεώνει να γράφουμε τις εξισώσεις μας έτσι ώστε να έχουν την ίδια μορφή σε κάθε σύστημα αναφοράς, δηλαδή να είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς Lorentz. Η απαίτηση αυτή είναι ταυτόσημη με το αξίωμα της ειδικής σχετικότητας (3.1) και ονομάζεται απαίτηση του *συναλλοίωτου.*

Μερικές φορές (αλλά πολύ λίγες, η εξής μία...) μπορούμε να το καταφέρουμε χρησιμοποιώντας τα κλασσικά μας εργαλεία: στροβιλισμούς, αποκλίσεις και κλίσεις, μερικές διαφορικές εξισώσεις κ.ο.κ. Όπως ακριβώς ο Maxwell που, χωρίς να το ξέρει, τα ξεκίνησε όλα.

Για τους λιγότερο τυχερούς μένει μόνο μία λύση: *Να γράφουμε τις εξισώσεις μας χρησιμοποιώντας μόνο τετρανύσματα, βαθμωτά και τανυστές.*

Οι προηγούμενοι κανόνες μετασχηματισμού εξασφαλίζουν την ίδια μορφή των εξισώσεών μας σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Μία εξίσωση $T^{\mu\nu}_{\sigma} = K^{\mu\nu}_{\sigma}$ θα είναι ολόϊδια (με ένα έξτρα τόνο) στο σύστημα Ο'.

Μία τέτοια εξίσωση, με τετρανύσματα, βαθμωτά και τανυστές, ονομάζεται προφανώς ή καλύτερα *εμφανώς συναλλοίωτη (manifestly covariant).*

6 Δυναμική

6.1 Τετραταχύτητα

Με χρήση τετρανυσμάτων το αναλλοίωτο διάστημα S ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο της "μετατόπισης" Δx^{μ} με τον εαυτό της.

$$S \equiv \Delta x_{\mu}\Delta x^{\mu} \tag{52}$$

και ο ιδιοχρόνος τ ως

$$c d\tau \equiv \sqrt{-dx_{\mu}dx^{\mu}} = \sqrt{c^2dt^2 - d\vec{x}^2} \tag{53}$$

Στο σύστημα που το σώμα είναι ακίνητο ισχύει προφανώς $d\tau = dt$. Σε σύστημα που το σωμάτιο κινείται με ταχύτητα $\vec{u} = \dfrac{dx^i}{dt}$ ισχύει $d\tau = dt\sqrt{1-u^2/c^2}$. Κρατάμε το σύμβολο v για την ταχύτητα του συστήματος Ο' σε σχέση με το Ο, και συμβολίζουμε με u κάθε άλλη ταχύτητα.

Η τετραταχύτητα ορίζεται όχι όπως θα περιμέναμε δηλαδή $\eta^{\mu} = \dfrac{dx^{\mu}}{dt}$ γιατί ο παρονομαστής μετασχηματίζεται και αυτός όπως και ο αριθμητής, και το αποτέλεσμα δεν είναι αναλλοίωτο. Επειδή ο ιδιοχρόνος εξ' ορισμού (βαθμωτό), είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz, ορίζουμε

$$\eta^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{54}$$

με συνιστώσες

$$\eta^0 = \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{55}$$

$$\eta^i = \frac{u^i}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{56}$$

όπου προφανώς $u^i = \vec{u}$. Η τετραταχύτητα μοιάζει λίγο υβριδική ποσότητα, αφού διαιρείται με το $d\tau$ που ουσιαστικά ανήκει στο O' σύστημα, αλλά μετασχηματίζεται κατά Lorentz όπως οφείλει κάθε καθώς πρέπει διάνυσμα. Εξ άλλου ο παρονομαστής είναι αναλλοίωτος οπότε η τετραταχύτητα ακολουθεί τον νόμο μετασχηματισμού του dx^μ. Δηλαδή ένα υπέροχα απλό κανόνα. Σε αντιδιαστολή ο νόμος μετασχηματισμού των συνιστωσών της κανονικής ταχύτητας $\vec{u}$ είναι αρκετά πολύπλοκος. Όμως δεν τον χρειαζόμαστε. Βρίσκουμε την τετραταχύτητα του σώματος και εφαρμόζουμε το $\eta'^\mu = \Lambda^\mu_\rho \eta^\rho$.

Ενδιαφέρον έχει και το μέτρο της τετραταχύτητας.

$$\begin{aligned}
n_{\mu\nu}\eta^\nu\eta^\mu = \eta_\mu\eta^\mu &= -\frac{c^2}{1-u^2/c^2} + \frac{(u^1)^2}{1-u^2/c^2} + \frac{(u^2)^2}{1-u^2/c^2} + \frac{(u^3)^2}{1-u^2/c^2} \\
&= -c^2\left(\frac{1-u^2/c^2}{1-u^2/c^2}\right) \\
&= -c^2 \\
n_{\mu\nu}\eta^\nu\eta^\mu &= -c^2
\end{aligned} \tag{57}$$

Απίστευτο κι όμως αληθινό. Στην σχετικότητα όλες οι τετραταχύτητες έχουν το ίδιο μέτρο c. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα κι όταν ακινητούμε τρέχουμε στην κατεύθυνση του χρόνου. Όταν έχουμε 3-ταχύτητα u τότε μειώνεται λίγο το τρέξιμό μας στην κατεύθυνση του χρόνου (time dilation ξανά). Αν καταφέρουμε να αποκτήσουμε 3-ταχύτητα c, τότε δεν τρέχουμε καθόλου στην κατεύθυνση του χρόνου. Λίγο δύσκολο αν έχουμε έστω και μικρή μάζα. Μην θριαμβολογούμε όμως ότι πετύχαμε το ελιξίριο της αθανασίας: μπορεί να μηδενίσαμε τον χρόνο αλλά εμείς σαν συνείδηση δεν θα "λειτουργούμε" για να το απολαύσουμε. Όλες μας οι αισθήσεις, σκέψεις, διαθέσεις θα έχουν επίσης παγώσει...

6.2 4-Επιτάχυνση

Ορίζεται φυσικά ως

$$A^\mu = \frac{d\eta^\mu}{d\tau} \tag{58}$$

Αν παραγωγίσουμε την (57) ως προς τ θα πάρουμε

$$2n_{\mu\nu}A^\nu\eta^\mu = 0 \tag{59}$$

Δηλαδή η 4-επιτάχυνση είναι πάντα κάθετη στην 4-ταχύτητα.

6.3 Τετραορμή

Η συνηθισμένη ορμή και η συνηθισμένη ενέργεια δεν είναι αναλλοίωτες. Αυτό σημαίνει ότι αν διατηρούνται σε ένα σύστημα αναφοράς αυτό δεν είναι αρκετό για να διατηρούνται σε κάποιο άλλο. Το σωστό τετράνυσμα, που διατηρείται σε κρούσεις και είναι αναλλοίωτο κατά Lorentz, βρέθηκε να είναι μία ανάμειξη ενέργειας και ορμής σε ένα τετράνυσμα:

$$p^\mu = m\eta^\mu \tag{60}$$

όπου m η *μάζα ηρεμίας* του σωματίου. Από τον ορισμό και μόνο η τετραορμή είναι ένα τετράνυσμα μιά και η μάζα ηρεμίας m είναι βαθμωτό και έτσι αναλλοίωτο. Οι συνιστώσες του είναι

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot \begin{pmatrix} c \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \tag{61}$$

και η χρονική αναγνωρίζεται ώς η ενέργεια E/c. Επομένως

$$E = m\eta^0 c = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma mc^2 \tag{62}$$

$$\vec{p} = m\vec{\eta} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma m\vec{u} \tag{63}$$

Το αναλλοίωτο μέτρο της τετραορμής $\mathbf{p}^2$ βρίσκεται

$$\mathbf{p}^2 = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 \tag{64}$$

και για τον υπολογισμό του (εφόσον είναι αναλλοίωτο) ας το υπολογίσουμε σε ένα σύστημα στο οποίο το σωμάτιο ηρεμεί έτσι ώστε $p^2 = 0$.

$$\mathbf{p}^2 = -\frac{E^2_{\text{ηρ}}}{c^2} = -m^2c^2 \tag{65}$$

Θέτοντας τώρα το αποτέλεσμα αυτό στην (64) θα πάρουμε τη βασική σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \tag{66}$$

Αν το σωματίδιο είναι ακίνητο τότε

$$E = mc^2 \tag{67}$$

που είναι η πασίγνωστη εξίσωση του Einstein.

Αν αναπτύξουμε κατά Taylor την σχέση (62) θεωρώντας $\beta \ll c$ έχουμε:

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 + \ldots \tag{68}$$

Ο πρώτος όρος είναι η ενέργεια ηρεμίας ενώ ο δεύτερος όρος είναι η συνηθισμένη κινητική ενέργεια K. Αυτή μπορεί να οριστεί:

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 \tag{69}$$

δηλαδή η ολική ενέργεια μείον τη μάζα ηρεμίας.

6.4 Μηδενική μάζα

Από την άλλη ένα σωμάτιο με μηδενική μάζα ηρεμίας θα έχει

$$E = pc \tag{70}$$

Στην κλασσική Νευτώνεια φυσική ένα σωμάτιο μηδενικής μάζας είναι αδιανόητο. Δεν μπορεί να ασκήσει δύναμη, ούτε να δεχθεί, δεν έχει ενέργεια ούτε ορμή. Όλα αυτά έχουν μέσα τους το m. Αλλά και στη σχετικιστική δυναμική ένα σώμα μηδενικής μάζας έχει πρόβλημα. Οι τύποι (62), (63) έχουν κι αυτοί μέσα τους τη μάζα m. Όμως εδώ υπάρχει ένα μικρό παραθυράκι: ο παρονομαστής. Αν κι αυτός είναι μηδενικός τότε το κλάσμα έχει μία απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$. Άρα ένα σωμάτιο μηδενικής μάζας άν θέλει να υπάρχει όχι ως αιθερική σκιά οφείλει να κινείται μόνο με την ταχύτητα του φωτός c.

Δηλαδή όλα τα φωτόνια κινούνται με την ίδια ταχύτητα και έχουν την ίδια μηδενική μάζα. Τότε πως είναι δυνατό να διαφέρουν οι ενέργειές τους; Είναι μήπως όλες οι ίδιες; Σ' αυτό δέν μπορεί να απαντήσει η σχετικότητα. Παραδόξως πως, η ερώτηση απαντήθηκε το 1900 (πριν τεθεί... ωχ, μήπως έχουμε υπερφωτεινή διάδοση;) από τον Planck. Στην εργασία του που εισήγαγε τους όρους *quantum* και *quanta* υπέθεσε ότι ενέργεια του φωτονίου είναι ανάλογη της συχνότητάς του ν:

$$E = h\nu \tag{71}$$

Η παραπάνω εξίσωση επίσης εισήγαγε μία πάρα πολύ ενδιαφέρουσα σταθερά και ξεκίνησε την κβαντική επανάσταση που ακόμα συνεχίζεται.

Λύνοντας ως προς την ορμή έχουμε για κάθε μηδενικής μάζας σωμάτιο:

$$p = h\frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{72}$$

Το όλο θέμα θα είχε φιλολογική σημασία αν δεν υπήρχε κανένα τέτοιο σωμάτιο. Όμως υπάρχουν, μεχρι στιγμής, δύο: το φωτόνιο και το νετρίνο. Το τρίτο της παρέας, το βαρυτόνιο, αναμένει την πειραματική του επιβεβαίωση...

6.5 Τετραδύναμη

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ δεν είναι αναλλοίωτος. Για να τον γράψουμε σε εμφανώς αναλλοίωτη μορφή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τετρανύσματα και τανυστές. Σε αναλογία με την κλασσική εξίσωση γράφουμε:

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \tag{73}$$

Το δεύτερο μέλος είναι προφανώς ένα τετράνυσμα, αφού το $d\tau$ είναι βαθμωτό, άρα και το πρώτο θα είναι ένα τετράνυσμα. Αυτή η δύναμη K^μ ονομάζεται δύναμη Minkowski και η σχέση της με την κανονική δύναμη $\vec{F}$ είναι:

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d\vec{p}/dt}{d\tau/dt} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{74}$$

$$K^0 = \frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{u}/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{75}$$

Στην δεύτερη εξίσωση έχουμε χρησιμοποιήσει το Θ.Μ.Κ.Ε. $dE = \vec{F}\cdot\vec{u}dt$.

6.6 Κλίση και Νταλαμπερτιανή

Το διάνυσμα

$$\partial_\mu \Phi = (\frac{\partial \Phi}{\partial x^0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3}) \tag{76}$$

όπου Φ μία βαθμωτή συνάρτηση, είναι συμμεταβλητό (συναλλοίωτο), όπως φαίνεται και από τη θέση του δείκτη, αν και η παραγώγιση γίνεται ως προς αντιμεταβλητό διάνυσμα. Και είναι συμμεταβλητό *γιατί μετασχηματίζεται ως συμμεταβλητό.* Αν παραλείψουμε την συνάρτηση τότε το διάνυσμα

$$\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}) \tag{77}$$

είναι το αντίστοιχο του ανάδελτα $\vec{\nabla}$ στην χώρο Minkowski.

Επισημαίνεται ότι το 4-άνυσμα ∂^μ έχει τον δείκτη μ πάνω και είναι αντιμεταβλητό (ανταλλοίωτο) αν και οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς συναλλοίωτα διανύσματα: $\partial^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$.

Η απόκλιση εδώ γράφεται

$$\partial_\mu A^\mu \tag{78}$$

και προφανώς είναι βαθμωτή ποσότητα άρα αναλλοίωτη.

Ο τετρα-στροβιλισμός είναι περιττός γιατί είναι πάντα μηδέν οπότε δεν μπαίνουμε στον κόπο να τον ορίσουμε. Παρόλα αυτά ο "τανυστής" (σύμβολο) Kronecker

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{cases} 0 & \text{αν δύο δείκτες είναι ίδιοι} \\ +1 & \text{αν λμνρ είναι άρτια μετάθεση των 0,1,2,3} \\ -1 & \text{αν λμνρ είναι περιττή μετάθεση των 0,1,2,3} \end{cases} \tag{79}$$

είναι πολύ χρήσιμος.

Η Λαπλασιανή $\vec{\nabla}^2$ εδώ γράφεται

$$\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu = -\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} + \vec{\nabla}^2 \tag{80}$$

και είναι αναλλοίωτη.

7 Εφαρμογές

1. *Ένας διαστημικός ταξιδιώτης συγχρονίζει ένα ρολόι του με τον Γήινο συνεργάτη του. Ο κάτοικος της Γης παρακολουθεί συνεχώς τα δύο ρολόγια, το δικό του άμεσα, και του ταξιδιώτη μέσω τηλεσκοπίου. Τη ένδειξη γράφει το γήινο ρολόι όταν του ταξιδιώτη, που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα v, γράφει μία ώρα;*

   Λύση

   Πρώτα θεωρούμε σύστημα αναφοράς στη Γη και στο διαστημόπλοιο του ταξιδιώτη έτσι ώστε $x' = x = 0$ και $t' = t = 0$ όταν συγχρόνισαν τα ρολόγια τους, και φυσικά έτσι ώστε η ταχύτητα να γράφεται $\vec{v} = v\hat{i}$ στο γήινο σύστημα αναφοράς. Αν θεωρήσουμε τώρα το γεγονός "το ρολόι του ταξιδιώτη γράφει χρόνο t_1'". Ο μετασχηματισμός Lorentz δίνει

   $$ct = \gamma(ct_1' + \beta x_1') = \gamma c t_1' \tag{81}$$
   $$x_1 = \gamma(x_1' + \beta c t_1') = \gamma\beta c t_1' \tag{82}$$

   όπου $x_1' = 0$ γιατί το ρολόι ήταν και εξακολουθεί να είναι στην αρχή του O'. Κατά τα γνωστά $\beta = \frac{v}{c}$ και $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

   Το σήμα από το κινούμενο ρολόι χρειάζεται χρόνο $\Delta t = x_1/c$ για να φτάσει στη Γη. Έτσι όταν ο γήινος δει το γεγονός "t_1'" το ρολόι του θα γράφει:

   $$t + \Delta t = \gamma t_1' + \gamma\beta t_1' \tag{83}$$
   $$= \gamma(1+\beta)t_1' \tag{84}$$
   $$= \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,t_1' \tag{85}$$

   Επομένως όταν το ρολόι του ενός γράφει 1 (ώρα) του άλλου στη Γη θα γράφει $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ ώρες.

2. *Αν x^μ είναι 4-άνυσμα και το γινόμενο με το a_μ είναι αναλλοίωτο τότε και το a_μ είναι 4-άνυσμα.*

   Λύση

   Αν $x'^\mu a'_\mu = x^\mu a_\mu$ τότε:

   $$\begin{gathered} x'^\mu a'_\mu = x^\mu a_\mu \Leftrightarrow \Lambda^\mu_\rho x^\rho a'_\mu = x^\mu a_\mu \Leftrightarrow \\ \Lambda^\mu_\rho x^\rho a'_\mu = x^\rho a_\rho \Leftrightarrow \Lambda^\mu_\rho a'_\mu = a_\rho \Leftrightarrow \\ (\Lambda^{-1})^\rho_\nu \Lambda^\mu_\rho a'_\mu = (\Lambda^{-1})^\rho_\nu a_\rho \Leftrightarrow \delta^\mu_\nu a'_\mu = (\Lambda^{-1})^\rho_\nu a_\rho \Leftrightarrow \\ a'_\nu = (\Lambda^{-1})^\rho_\nu a_\rho \end{gathered}$$

   Επομένως και το a_μ μετασχηματίζεται ως 4-άνυσμα (συμμεταβλητό). Χρησιμοποιήσαμε την ελευθερία μετονομασίας των βουβών δεικτών και την ιδιότητα $\delta^\mu_\nu a_\mu = a_\nu$.

3. *Χρησιμοποιώντας την άσκηση (2) και το γεγονός ότι το x^μ είναι 4-άνυσμα, να αποδείξετε ότι το $(c\vec{k}, \omega)$, όπου $\vec{k}$ ο κυματάριθμος και ω η κυκλική συχνότητα, είναι 4-άνυσμα.*

   Λύση

   Ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει εξισώσεις:

   $$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \tag{86}$$
   $$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \tag{87}$$

Από τις εξισώσεις μετασχηματισμού των πεδίων

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel} \tag{88}$$
$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \mu_0 \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}) \tag{89}$$
$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}) \tag{90}$$

είναι φανερό ότι η ποσότητα στο εκθετικό του επίπεδου κύματος πρέπει να είναι αναλλοίωτη:

$$\vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t' = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t \tag{91}$$

Όμως το $x^{\mu} = (\vec{x}, ct)$ είναι 4-άνυσμα. Από την εφαρμογή (2) έπεται ότι και το $(c\vec{k}, \omega)$ είναι 4-άνυσμα.

4. *Βρείτε τον τύπο για το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler.*

   Λύση

   Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της άσκησης (1), αλλά καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε την άσκηση (3). Ένας παρατηρητής βρίσκεται στην αρχή του συστήματος Ο και ένα άτομο εκπέμπει Η/Μ ακτινοβολία απομακρινόμενο από αυτόν με ταχύτητα βc στην x διεύθυνση. Το άτομο ακίνητο εκπέμπει συχνότητα ω_0. Το φως που φτάνει στον παρατηρητή εκπέμπεται στην $-x$ διεύθυνση άρα

$$\vec{k}' = (-k', 0, 0) = \left(-\frac{\omega}{c}, 0, 0\right) \tag{92}$$

   Το $(c\vec{k}, \omega)$ μετασχηματίζεται ως τετράνυσμα άρα με τους γνωστούς μετασχηματισμούς Lorentz.

$$\omega = \gamma(ck' - \beta\omega') = \gamma(\omega' - \beta\omega') = \gamma(1-\beta)\omega_0 = \omega_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{93}$$

   όπου πάλι $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

   Άρα τελικά

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{94}$$

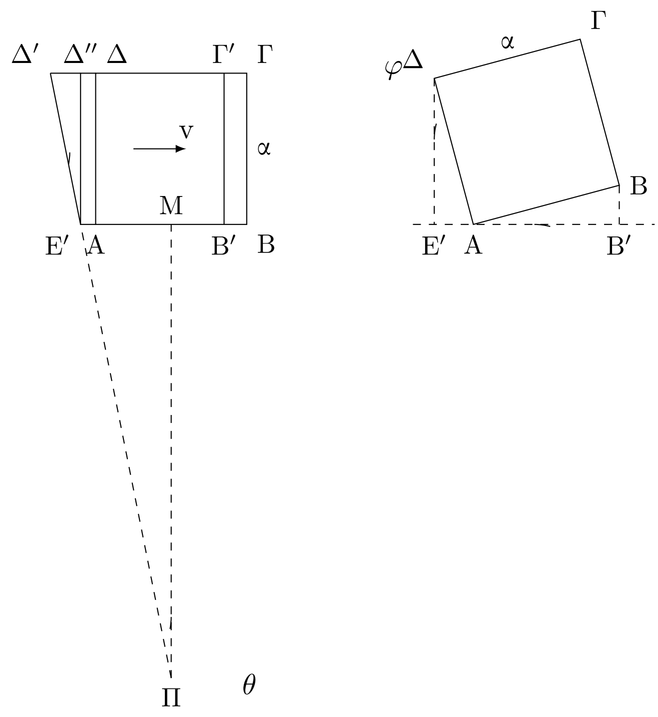
   Αν το άτομο κινείται προς τον παρατηρητή τότε το βc πρέπει να αντικατασταθεί με το $-\beta c$ και ο τύπος γίνεται

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{95}$$

5. **Το αόρατο της συστολής Lorentz.** *Ένα σφαιρικό σώμα κινείται με ταχύτητα v σε μεγάλη απόσταση από παρατηρητή Π. Όταν το σώμα βρίσκεται σε θέση έτσι ώστε η ταχύτητά του να είναι κάθετη στην ευθεία που το συνδέει με τον παρατηρητή, αυτός το φωτογραφίζει με μία κάμερα. Τι θα δει ο παρατηρητής όταν εμφανίσει το film; (ή όταν κοιτάξει την οθόνη της ψηφιακής του μηχανής;)*

   Λύση Ας θεωρήσουμε ένα λεπτό τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α που κινείται με ταχύτητα v και παρατηρητή Π που βρίσκεται αρκετά μακρυά του έτσι ώστε $L \gg \alpha$. Η γραμμή όρασης του Π είναι πάνω στο επίπεδο του τετραγώνου και τη στιγμή που τραβάει τη φωτογραφία η πλευρά ΑΒ είναι κάθετη στο L. Ξέρουμε ότι λόγω συστολής Lorentz ο Π θα πρέπει να βλέπει την πλευρά ΑΒ μικρότερη κατά γ:

$$AB' = \frac{AB}{\gamma} \tag{96}$$



Η πρώτη απάντηση που σκεφτόμαστε είναι ότι ο Π (και η φωτογραφική του μηχανή) βλέπει το τετράγωνο ως ορθογώνιο πλευρών AB' και α. Όμως αυτό είναι λάθος. Γιατί στο μάτι, όπως και στο φιλμ ή τον αισθητήρα της φωτογραφικής μηχανής, φτάνει φως από σημεία στα οποία βρίσκονταν το τετράγωνο σε κάποιο προηγούμενο (καθυστερημένο, retarded) χρόνο. Στην ουσία δεν βλέπεις μόνο το αντικείμενο αλλά και ένα μικρό παρελθόν του.

Το φως από το σημείο Δ', που εκπέμπεται από το σημείο Δ όταν βρισκόταν στη θέση του Δ',τέμνει την ευθεία AB στο E' τη στιγμή της φωτογράφισης, και θα φτάσει στο μάτι από το σημείο E'. Στον ίδιο χρόνο το τετράγωνο έχει κινηθεί κατά $\Delta'\Delta$ και από τη γεωμετρία έχουμε:

$$\frac{\Delta'\Delta}{v} = \frac{\Delta' E'}{c} = \frac{\alpha/\cos\theta}{c} = \frac{\alpha}{c\cos\theta} \text{ ή} \tag{97}$$

$$\Delta'\Delta = \frac{v\alpha}{c}\frac{1}{\cos\theta} \tag{98}$$

$$E'A = \Delta'\Delta - \alpha\tan\theta = \alpha\left(\frac{v}{c}(\cos\theta)^{-1} - \tan\theta\right) \approx \frac{\alpha v}{c} = \beta\alpha \tag{99}$$

Η προσέγγιση μπορεί να γίνει αφού $L \gg \alpha$, και τότε $\theta \approx 0$, $\cos\theta \approx 1$, $\tan\theta \approx 0$. Από την συστολή Lorentz έχουμε ήδη βρεί ότι

$$AB' = \alpha\sqrt{1-\beta^2} \tag{100}$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ να έχει περιστραφεί κατά γωνία φ αριστερόστροφα γύρω από το σημείο Α, τότε

$$E'A = \alpha\sin\varphi \text{ και } AB' = \alpha\cos\varphi \tag{101}$$

Παρατηρούμε ότι η γεωμετρία είναι εντελώς ίδια αν διαλέξουμε $\sin\varphi = \beta$ γιατί τότε $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\beta^2}$

Άρα στο φιλμ θα φαίνεται ένα τετράγωνο με γωνία στροφής φ τέτοια ώστε $\sin\varphi = \beta$.

Στην περίπτωσή μας που το σώμα είναι σφαιρικό *δεν βλέπουμε καμία συστολή Lorentz*. Όπως γράφει χαρακτηριστικά ο Griffiths[1], άλλο είναι το *παρατηρούμε* και άλλο το *βλέπουμε*. Βέβαια άν το σφαιρικό μας σώμα έχει στην επιφάνειά του χαρακτηριστικά σημάδια τότε θα δούμε τη γωνία στροφής φ. Αυτός είναι και ο λόγος που δεν βλέπουμε συστολή Lorentz στους μακρινούς γαλαξίες που κινούνται με σχετικιστικές ταχύτητες ως προς εμάς, ούτε με τα μάτια μας, ούτε με τηλεσκόπια, ούτε με φωτογραφικές μηχανές. Παρατηρούμε όμως το σχετικιστικό Doppler οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη σχετική τους ταχύτητα...

6. *Ένας αστροναύτης ανάβει ένα συνηθισμένο φακό και τον αφήνει στο διαστημικό κενό. Θεωρούμε ότι ο φακός δεν περιστρέφεται. Πόση επιπρόσθετη ταχύτητα θα αποκτήσει ο φακός - μίνι πύραυλος αν οι μπαταρίες του τελειώσουν σε δύο ώρες;*

   Αν θεωρήσουμε ότι ο φακός έχει ένα παραβολικό κάτοπτρο ώστε όλες οι ακτίνες να έχουν την ίδια σχεδόν διεύθυνση, και ότι η ισχύς του είναι P. Η ολική ενέργεια των φωτονίων που εξέρχονται θα είναι $E = Pt$. Αν, όπως υποθέσαμε, δεν περιστρέφεται η αύξηση στην ορμή του θα είναι:

$$mv = \frac{E}{c} = \frac{Pt}{c} \tag{102}$$

   και η επιπρόσθετη ταχύτητά του θα είναι:

$$v = \frac{Pt}{mc} \tag{103}$$

   Ένα υπολογισμός για $P = 1\,W$, $m = 0.3\,Kg$, $t = 2\,h$ δίνει $v = 8 \cdot 10^-5\,m/s$.

7. *Βρείτε την ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει ένα πρωτόνιο P ώστε συγκρουόμενο με ακίνητο πρωτόνιο να δημιουργήσει ένα ζεύγος πρωτονίου-αντιπρωτονίου. Feynman[3]*

   Λύση

   Η δεδομένη αντίδραση είναι $P+P \to P+P+P+\hat{P}$. Στο δεξί μέλος πρέπει να υπάρχουν 3 πρωτόνια P και ένα αντιπρωτόνιο $\hat{P}$ λόγω διατήρησης του βαρυονικού αριθμού. Στο σύστημα κέντρου μάζας τα δύο αρχικά πρωτόνια κινούνται με αντίθετες (φυσιολογικές) ορμές. Αναζητάμε την ελάχιστη κινητική ενέργεια του αρχικού πρωτονίου, οπότε θα θεωρήσουμε ότι μετά την "σύγκρουση" τα παραγόμενα 4 σωματίδια ακινητούν στο σύστημα Κ.Μ. Η διατήρηση της 4-ορμής μας δίνει:

$$p_a^\mu + p_b^\mu = p_c^\mu \tag{104}$$

   που σημαίνει ότι ισχύει και η διατήρηση της ενέργειας και η διατήρηση της ορμής. Οι δείκτες a, b, c δηλώνουν απλώς το πρώτο, το δεύτερο και τα τελικά 4 σωματίδια που θεωρούμε ακίνητα.

   Τα μέτρα θα είναι επίσης ίσα οπότε:

$$(p_{a\mu} + p_{b\mu})(p_a^\mu + p_b^\mu) = p_{c\mu} p_c^\mu \tag{105}$$

   Η ποσότητα $p_{c\mu} p_c^\mu$ είναι εύκολο να υπολογιστεί, αφού τα σωματίδια έχουν ίσες μάζες M και ακινητούν, οπότε $p_{c\mu} = (-4Mc^2, 0)$. Επομένως $p_{c\mu} p_c^\mu = -16M^2c^2$.

   Όμοια $p_{a\mu} p_a^\mu = p_{b\mu} p_b^\mu = -M^2c^2$ σχέση που ισχύει για κάθε τετραορμή.

   Απομένει μόνο το $p_{a\mu} p_b^\mu + p_a^\mu p_{b\mu} = 2 p_{a\mu} p_b^\mu$. Οι τετραορμές των πρωτονίων a και b είναι στο σύστημα του εργαστηρίου $p_{a\mu} = (Mc^2, 0)$ και $p_{b\mu} = (E_a, \vec{p}_b)$, οπότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι $-Mc^2 E_a$ στο σύστημα εργαστηρίου άρα, ως αναλλοίωτο, και στο σύστημα Κ.Μ.

   Συνδυάζοντάς τα έχουμε:

$$-2M^2c^2 - 2Mc^2 E_a = -16M^2c^2 \tag{106}$$

$$E_a = 7M \tag{107}$$

   Η ολική ενέργεια του κινούμενου πρωτονίου πρέπει να είναι τουλάχιστο $7M$ οπότε η κινητική του $6M$.

8 Παράρτημα

8.1 Παραγωγή της κυματικής εξίσωσης

Το κόλπο είναι να πάρουμε τον στροβιλισμό και στα δύο μέλη της (11) (Faraday). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διανυσματική ταυτότητα για τον στροβιλισμό του στροβιλισμού, αλλά ποιός τη θυμάται; Ας χρησιμοποιήσουμε δείκτες και τη μόνη ταυτότητα που χρειάζεται να απομνημονεύσουμε:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{108}$$

όπου το ϵ_{ijk} είναι το σύμβολο Levi-Civitta και είναι μηδέν για δύο ίδιους δείκτες και αντισυμμετρικό για εναλλαγή των δεικτών, ενώ το δ_{jl} του Kronecker είναι μηδέν για $i \neq j$ και ένα για $i = j$. Με τους τανυστές αυτούς, με χρήση δεικτών και θεωρώντας άθροιση για επαναλαμβανόμενους δείκτες είτε είναι πάνω-κάτω είτε κάτω όλοι, ο στροβιλισμός $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ γράφεται (η i συνιστώσα του) $(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k$, η απόκλιση γράφεται $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_i A_i$, και η κλίση $\vec{\nabla}\varphi = \partial_i \varphi$.

Η εξίσωση $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{B}$, στο αριστερό της μέρος γράφεται (η i συνιστώσα της)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\partial_j \epsilon_{klm}\partial_l E_m &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l E_m \\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l E_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l E_m \\
&= \delta_{il}\delta_{jm}\partial_j\partial_l E_m - \delta_{im}\delta_{jl}\partial_j\partial_l E_m \\
&= \partial_m\partial_i E_m - \partial_l\partial_l E_i \\
&= \partial_i\partial_m E_m - \partial_l\partial_l E_i
\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}))_i &= \vec{\nabla}_i(\vec{\nabla}\vec{E}) - \nabla^2 E_i \\
&= -\nabla^2 E_i
\end{aligned} \tag{109}$$

λόγω της (10) $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$. Το δε δεύτερο μέλος είναι (λόγω της (13), Ampere-Maxwell)

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{110}$$

οπότε εξισώνοντας προκύπτει

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{111}$$

Αναφορές

[1] David J. Griffiths. *Εισαγωγή στην Ηλεκροδυναμική ΙΙ.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2005.

[2] The Physics Coaching Class. *Problems and solutions on mechanics.* World Scientific, 2005.

[3] Sands Feynman, Leighton. *The Feynman Lectures on Physics vII.* Addison-Wesley, 1964.

[4] Gerald t' Hooft. Introduction to general relativity. CAPUTCOLLEGE 1998, Lecture notes.

[5] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory.* Cambridge Univercity Press, 2007.

[6] Pollack & Stump. *Elecrtomagnetism.* Addison-Wesley, 2002.

[7] Ι. Δ. Βέργαδος. *Κλασσική Ηλεκροδυναμική.* Εκδόσεις Συμεών, 2002.

[8] Κωνσταντίνος Γούδας. *Μαθήματα Ειδικής Θεωρίας Σχετικότητας.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Πάτρας, 1983.