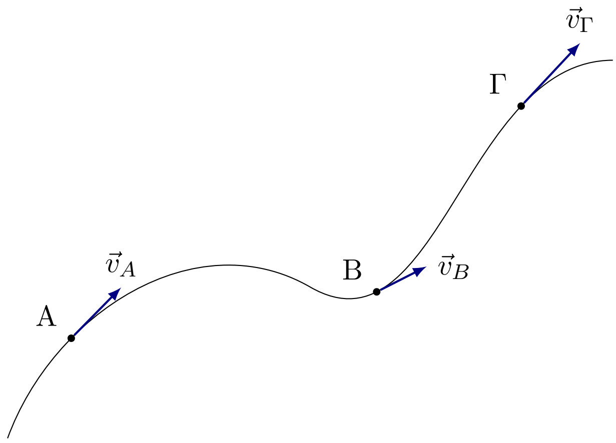
1 Καμπυλόγραμμη κίνηση

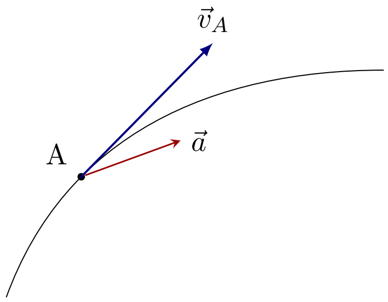
Ας θεωρήσουμε μία τυχαία κίνηση σε κάποιο επίπεδο (2-διαστάσεις). Η κίνηση θα είναι εν γένει μία καμπύλη και οι ταχύτητες σε κάθε θέση είναι πάντα εφαπτόμενες στην τροχιά, όπως στο παρακάτω σχήμα:



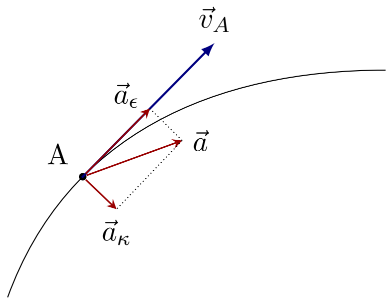
α΄. Μία τυχαία καμπύλη τροχιά στο επίπεδο.

Στην ευθύγραμμη κίνηση η επιτάχυνση είναι πάντα συγγραμμική με την ταχύτητα (ομόρροπη στην επιταχυνόμενη, αντίρροπη στην επιβραδυνόμενη κίνηση).

Όταν όμως η τροχιά είναι καμπύλη η επιτάχυνση *δεν είναι συγγραμμική* με την ταχύτητα, αλλά σχηματίζει με αυτή μία γωνία προς το μέρος της κοιλότητας της τροχιάς στο κάθε σημείο.



β΄. Η επιτάχυνση σχηματίζει γωνία προς το μέρος της κοιλότητας.



γ΄. Η επιτάχυνση αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την επιτρόχιο $\vec{a}_\epsilon$ και την κεντρομόλο $\vec{a}_\kappa$.

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την επιτρόχιο $\vec{a}_\epsilon$, η οποία είναι στη διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}$ και την κεντρομόλο $\vec{a}_\kappa$, η οποία είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$ (και προς το μέρος της κοιλότητας).

Η επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_\epsilon$ αυξάνει (ή μειώνει) **το μέτρο της ταχύτητας** $\vec{v}$, ενώ η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{a}_\kappa$ αλλάζει **τον προσανατολισμό** του διανύσματος $\vec{v}$ της ταχύτητας.

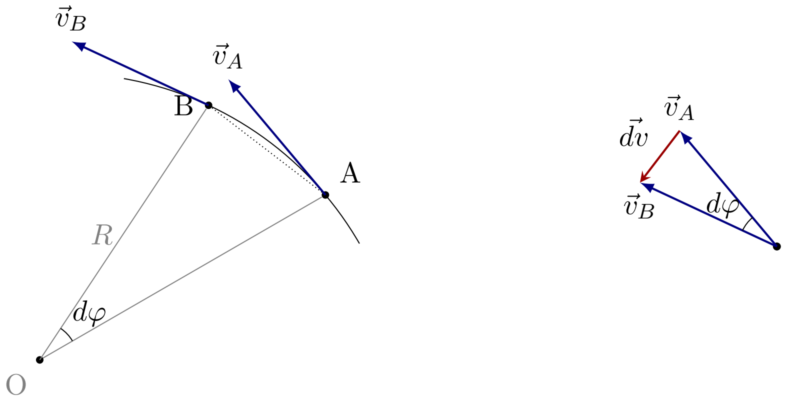
1.1 Κεντρομόλος Επιτάχυνση

Η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο

$$a_\kappa = \frac{v^2}{R} \tag{1}$$

όπου v το μέτρο της ταχύτητας και R η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο δεδομένο σημείο της καμπύλης.

Απόδειξη. (*Εντελώς Εκτός Ύλης*) Ας θεωρήσουμε για απλούστευση των υπολογισμών μία κυκλική τροχιά με σταθερό μέτρο ταχύτητας v.



δ′. Το τρίγωνο των διανυσμάτων δεξιά και το AOB είναι όμοια, αφού είναι ισοσκελή και η οξείες γωνίες τους είναι ίσες.

Απόδειξη. Στο σχήμα δ′ σε κάποιο χρόνο dt το σώμα γράφει το τόξο $ds = \overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και το διάνυσμα της ταχύτητας στρέφεται κατά $d\varphi$. Προφανώς ισχύει

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{2}$$

Επίσης η μεταβολή $\vec{dv}$ του διανύσματος της ταχύτητας μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{dv} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \tag{3}$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων των διανυσμάτων και του AOB έχουμε ότι

$$\begin{gathered} \frac{dv}{v} = \frac{AB}{R} \Leftrightarrow \\ \frac{dv}{AB} = \frac{v}{R} \end{gathered} \tag{4}$$

Τώρα κάνουμε μία προσέγγιση (η οποία έχει όλο και μικρότερο λάθος όσο μικραίνει η γωνία $d\varphi$). Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB προσεγγιστικά ίσου μήκους με το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$. Από την (2) έχουμε $ds = vdt$ και αντικαθιστώντας στην (4):

$$\begin{gathered} \frac{dv}{AB} = \frac{v}{R} \Leftrightarrow \frac{dv}{vdt} = \frac{v}{R} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R} \\ a_\kappa = \frac{v^2}{R} \end{gathered} \tag{5}$$

□

1.2 Κεντρομόλος Δύναμη

Από τον β′ νόμο του Newton, αφού υπάρχει κεντρομόλος επιτάχυνση a_κ θα υπάρχει και κεντρομόλος δύναμη F_κ. Αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$F_\kappa = ma_\kappa \Leftrightarrow \boxed{F_\kappa = \frac{mv^2}{R}} \tag{6}$$

Το σημαντικό είναι ότι αυτή δεν είναι ένα νέο είδος δύναμης, όπως η βαρυτική, η ηλεκτρική κτλ, αλλά κάποια ή κάποιες από τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου. Και συγκεκριμένα *η συνισταμένη δύναμη που είναι κάθετη κάποια στιγμή στην ταχύτητα είναι η κεντρομόλος δύναμη.*

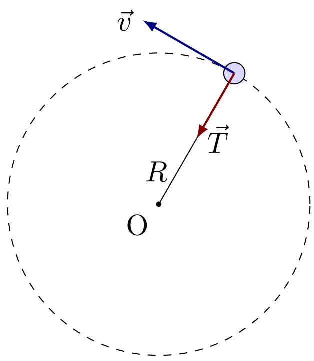
Δηλαδή

$$\Sigma F_{(R)} = F_\kappa = \frac{mv^2}{R} \tag{7}$$

όπου $\Sigma F_{(R)}$ είναι η συνισταμένη των δυνάμεων στην διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής κίνησης.

Μερικά παραδείγματα:

Α. Σώμα δεμένο σε νήμα περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα σε οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα:

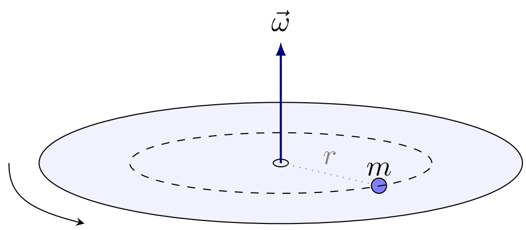


ε΄. Σώμα δεμένο σε νήμα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο (κάτοψη)

Μόνη δύναμη στην διεύθυνση της ακτίνας είναι η τάση $\vec{T}$, οπότε αυτή είναι η κεντρομόλος, και ισχύει:

$$T = \frac{mv^2}{R} \tag{8}$$

Β. Σώμα m πάνω σε περιστρεφόμενο δίσκο. Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ σε οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα:



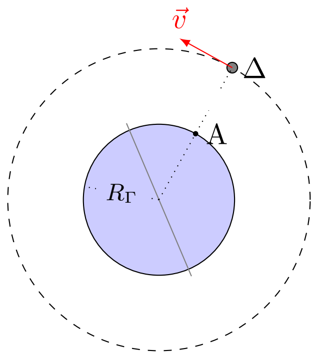
Ϛ΄. Σώμα πάνω σε περιστρεφόμενο οριζόντιο δίσκο.

Ένα σώμα μάζας m είναι τοποθετημένο στον δίσκο σε ακτίνα r από το κέντρο του. Αν το σώμα δεν ολισθαίνει στον δίσκο τότε η στατική τριβή θα είναι η κεντρομόλος δύναμη. Αυτό θα συμβαίνει όσο η στατική τριβή είναι μικρότερη ή οριακά ίση με την μέγιστη στατική τριβή (οριακή τριβή), $T_{\text{ορ}}$.

$$T_s = \frac{mv^2}{R} \leq \mu mg \tag{9}$$

Από την ανισότητα μπορούμε να βρούμε την μέγιστη ταχύτητα v ή ω που μπορεί να περιστραφεί ο δίσκος χωρίς να γλυστρίσει το σώμα.

Γ. Δορυφόροι (φυσικοί και τεχνητοί)



ζ΄. Δορυφόρος περιστρέφεται γύρω από τη Γη.

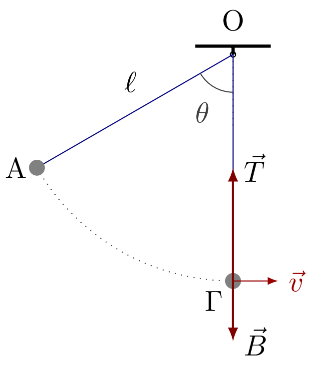
Κάθε σώμα που περιστρέφεται γύρω από ένα άλλο ουράνιο σώμα λόγω της βαρυτικής έλξης ονομάζεται Δορυφόρος. Επειδή στο διάστημα έχουμε πρακτικά κενό, δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβής και η κίνηση συνεχίζεται επ΄ άπειρον.

Η μόνη δύναμη που δρα στον δορυφόρο του σχήματος είναι το βάρος του σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης (ή σε απόσταση $R_\Gamma + h$ από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του). Αυτή είναι η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη που κρατά τον δορυφόρο στην κυκλική του κίνηση.

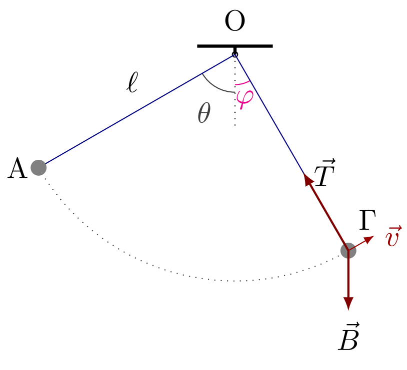
$$B = \frac{mv^2}{R_\Gamma + h} \Leftrightarrow mg = \frac{mv^2}{R_\Gamma + h} \Leftrightarrow g = \frac{v^2}{R_\Gamma + h} \tag{10}$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την απαραίτητη ταχύτητα v ώστε να θέσουμε ένα δορυφόρο σε τροχιά σε ύψος h (αρκεί να ξέρουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας σε αυτό το ύψος).

Δ. Εκκρεμές



η΄. Σώμα και νήμα. Στο κατώτερο σημείο της τροχιάς ισχύει $T > B$.



θ΄. Σε τυχαίο σημείο της τροχιάς, η κεντρομόλος είναι η τάση μείον την συνιστώσα του βάρους στη διεύθυνση της ακτίνας.

Το σώμα αφήνεται από το σημείο Α και όταν φτάνει στο Γ έχει ταχύτητα $\vec{v}$. Στο σημείο αυτό (σχήμα η΄) θα ισχύει:

$$\Sigma F_{(R)} = F_\kappa \Leftrightarrow T - B = \frac{mv^2}{R} \tag{11}$$

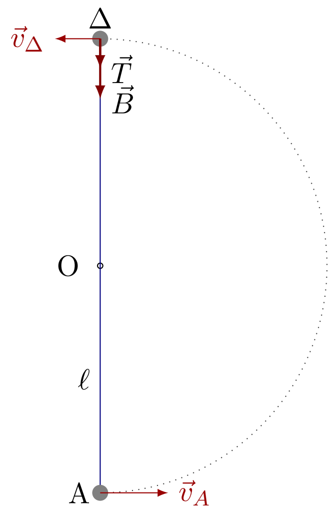
από την οποία μπορούμε να βρούμε την τάση, αν πρώτα υπολογίσουμε την ταχύτητα v.

Στην τυχαία θέση του εκκρεμούς (σχήμα ϑ΄), αναλύουμε το βάρος B σε έναν άξονα $y'y$ που ταυτίζεται με την ακτίνα R και στον κάθετό του $x'x$, και με τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$\Sigma F_{(R)} = F_\kappa \Leftrightarrow T - B_y = \frac{mv^2}{R} \Leftrightarrow T - mg\,\text{συν}\,\varphi = \frac{mv^2}{R}$$
$$T = mg\,\text{συν}\,\varphi + \frac{mv^2}{R} \tag{12}$$

Ε. Ανακύκλωση (loop not recycle!)

Ας θεωρήσουμε το εκκρεμές του προηγούμενου παραδείγματος το οποίο περιστρέφεται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Ζητάμε την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να του δώσουμε στην κατώτερη θέση ώστε να γράφει ένα πλήρη κύκλο (ανακύκλωση) με το νήμα πάντα τεντωμένο.



ι΄. Σώμα δεμένο σε νήμα κάνει ανακύκλωση.

Για να είναι πάντα τεντωμένο το νήμα πρέπει να υπάρχει πάντα τάση T, δηλαδή $T \geq 0$. Το προβληματικότερο σημείο είναι το ανώτερο σημείο Δ.

Σε αυτό το σημείο πρέπει σίγουρα να υπάρχει μία ταχύτητα υ_Δ (γιατί αλλιώς το σώμα ϑα κάνει ελεύϑερη πτώση...) Επομένως

$$\Sigma F_{(R)} = F_\kappa \Leftrightarrow T + B = \frac{mv_\Delta^2}{\ell}$$
$$T = \frac{mv_\Delta^2}{\ell} - mg \tag{13}$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει/μικραίνει η τάση T το ίδιο κάνει και η ταχύτητα υ_Δ.

Δεδομένου ότι ϑέλουμε $T \geq 0$ οριακά μπορούμε να ϑέσουμε $T = 0$ και να βρούμε *την ελάχιστη ταχύτητα στο Δ* ώστε να γίνει η ανακύκλωση.

$$0 = \frac{mv_\Delta^2}{\ell} - mg \Leftrightarrow mg = \frac{mv_\Delta^2}{\ell}$$
$$v_\Delta^2 = g\ell \Leftrightarrow v_\Delta = \sqrt{g\ell} \tag{14}$$

Και με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των σημείων Α και Δ:

$$K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_\Delta^2 + mg2\ell$$
$$v_A^2 = v_\Delta^2 + 4g\ell \Leftrightarrow v_A^2 = g\ell + 4g\ell \Leftrightarrow \boxed{v_A = \sqrt{5g\ell}} \tag{15}$$

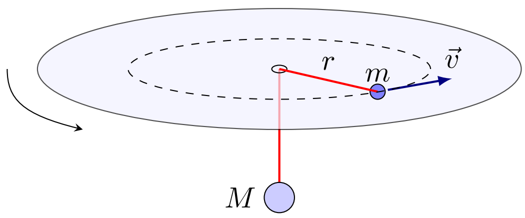
Ενδιαφέρον έχει και ο υπολογισμός της τάσης T στο σημείο Α όταν το σώμα βάλλεται με την ελάχιστη ταχύτητα ώστε να γίνει η ανακύκλωση.

$$\Sigma F_{(R)} = F_\kappa \Leftrightarrow T - B = \frac{mv_A^2}{\ell}$$
$$T = \frac{mv_A^2}{\ell} + mg \Leftrightarrow T = \frac{m5g\ell}{\ell} + mg$$
$$T = 5mg + mg \Leftrightarrow T = 6mg \tag{16}$$

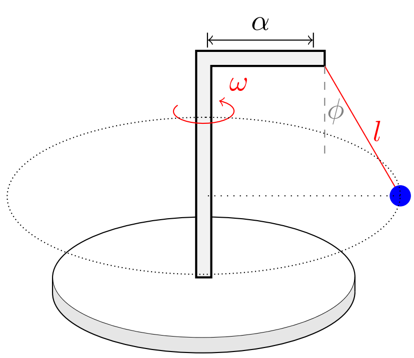
Δηλαδή η τάση T είναι έξι φορές μεγαλύτερη του βάρους!

Εξάσκηση

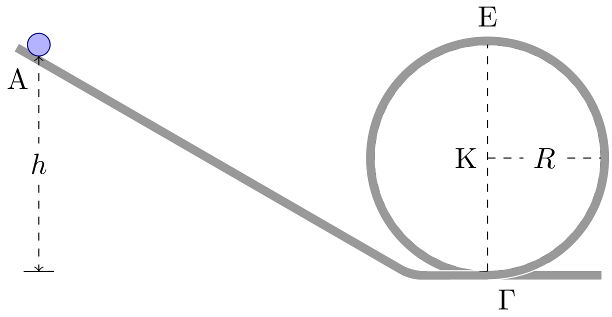
1. Σε μία μικρή τρύπα που έχουμε ανοίξει σε ένα οριζόντιο τραπέζι, περνάμε ένα νήμα και στα δύο άκρα του δένουμε σώματα μαζών M και m. Το μικρό σώμα περιστρέφεται με σταθερή (γραμμική) ταχύτητα v σε ακτίνα r, ενώ το μεγάλο σώμα ισορροπεί. Βρείτε την ταχύτητα v. Δίνονται $m = 1\text{kg}$, $M = 5\text{kg}$, $r = 0.5\text{m}$, $g = 10\text{m/s}^2$.



2. Βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο όταν το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Δίνονται: m, ℓ, a, g.



3. Μικρή σφαίρα αφήνεται από ύψος h σε κεκλιμένο δρόμο, στον οποίο κινείται χωρίς τριβές. Ο δρόμος καταλήγει σε κυκλική διαδρομή ακτίνας R. Αν θεωρήσουμε την ακτίνα της μικρής σφαίρας αμελητέα (σε σχέση με την ακτίνα R), να υπολογήσετε από ποιο ύψος h πρέπει να αφήσουμε την σφαίρα ώστε να περάσει από όλη την κυκλική διαδρομή.



Ε
Α
h
Κ
R
Γ