1.1 Επανάληψη - Ταλαντώσεις

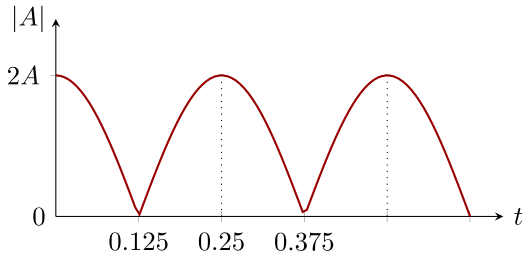
Μερικές ερωτήσεις με δικαιολόγηση και λίγα προβλήματα για επανάληψη στις Ταλαντώσεις. Αρχικά, για χρήση στην εξ' αποστάσεως εκπαίδευση λόγω κορονοϊού (covid-19)...
Επιμέλεια: Γιώργος Χ. Παπαδημητρίου

1.1.1 Ερωτήσεις

1. Σώμα μετέχει σε δύο ταλαντώσεις της μορφής

$$x_1 = A\,\text{ημ}\,\omega_1 t \qquad (1.1)$$
$$x_2 = A\,\text{ημ}\,\omega_2 t \qquad (1.2)$$

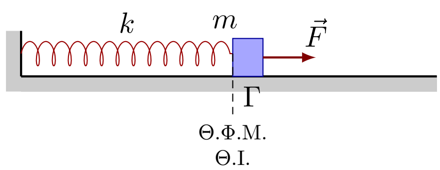
με συχνότητες $f_1 = 38\text{Hz}$ και $f_2 > f_1$.
Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται το πλάτος της περιοδικής κίνησης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



Στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας του:

(α′) 10 φορές. (β′) 20 φορές. (γ′) 40 φορές.

2. Στο σώμα m του σχήματος που είναι δεμένο σε ελατήριο k και ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ασκείται ξαφνικά δύναμη F μέχρι την χρονική στιγμή που το σώμα σταματάει στιγμιαία. Η ταχύτητα με την οποία θα περάσει το σώμα από τη θέση ισορροπίας του μετά τον μηδενισμό της δύναμης F έχει μέτρο:



(α′) $\dfrac{2F}{\sqrt{mk}}$ (β′) $\dfrac{F}{\sqrt{mk}}$ (γ′) $\dfrac{F}{\sqrt{2mk}}$

3. Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση για την οποία η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$x = A\,\text{ημ}(\omega t) + \sqrt{3}A\,\text{ημ}(\omega t + 3\pi/2)$$

Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης αυτής θα είναι ίση με :

(α′) $v_{\max} = \omega A$ (β′) $v_{\max} = 2\omega A$ (γ′) $v_{\max} = \sqrt{3}\omega A$

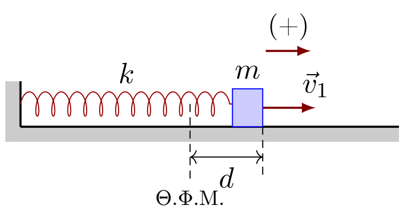
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Σώμα m δεμένο σε ελατήριο k κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση σε αέρα με μικρό συντελεστή απόσβεσης b και εξωτερική δύναμη της μορφής $F_\delta = F_0\,\text{συν}\,2\pi f_\delta t$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι το μέγιστο δυνατό. Αν αντικαταστήσουμε το σώμα με άλλο διπλάσιας μάζας, τότε για να έχουμε πάλι μέγιστο πλάτος ταλάντωσης πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη:

(α′) να μείνει σταθερή. (β′) να αυξηθεί κατά 30% (γ′) να μειωθεί κατά 30%

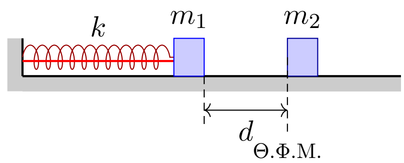
Δίνεται ότι $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$

5. Σώμα m δεμένο σε ελατήριο k κρατείται σε απομάκρυνση d και βάλλεται με ταχύτητα $v_1 = \omega d$ προς τα δεξιά όπως στο σχήμα. Η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης είναι:



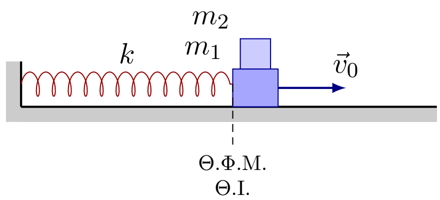
(α') $x = \sqrt{2}d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{\pi}{4})$ (β') $x = \sqrt{2}d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{3\pi}{4})$ (γ') $x = 2d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{\pi}{4})$

6. Σώμα m_1 δεμένο σε ελατήριο k κρατείται με νήμα σε απομάκρυνση d. Στη θέση ισορροπίας του βρίσκεται ακίνητο δεύτερο σώμα $m_2 = 3m_1$. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα. Η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική και πλαστική. Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:



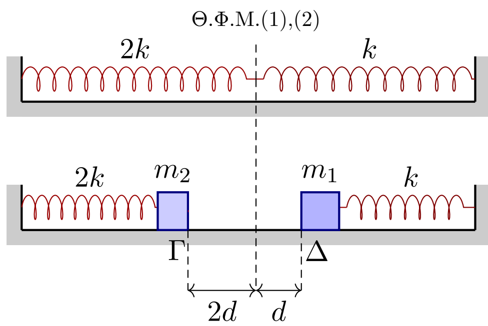
(α') $A' = \frac{d}{4}$ (β') $A' = \frac{d}{3}$ (γ') $A' = \frac{d}{2}$

7. Σώμα m_1 είναι δεμένο σε ελατήριο k και πάνω σε αυτό βρίσκεται δεύτερο σώμα m_2, το οποίο παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής μ. Όταν το σύστημα των m_1, m_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του έχει ταχύτητα v_0. Η τιμή της ταχύτητας v_0 ώστε το m_2 να μήν ολισθαίνει πάνω στο m_1 πρέπει να είναι:



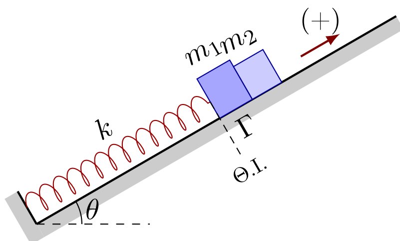
(α') $v_0 \le \mu g\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$ (β') $v_0 \ge \mu g\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$ (γ') $v_0 \le \mu g\sqrt{\frac{m_2}{k}}$

8. Στις ελεύθερες άκρες ελατηρίων k και $2k$ συνδέονται σώματα $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ αντίστοιχα. Τα σώματα απομακρύνονται από την κοινή θέση φυσικών μηκών των ελατηρίων κατά $2d$ και d αντίστοιχα και την χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνονται ελεύθερα. Τα σώματα συγκρούονται στη Θ.Φ.Μ. κεντρικά και ελαστικά, και το συσσωμάτωμα κάνει α.α.τ. με $D = 3k$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι:



(α') $A' = d$ (β') $A' = d/2$ (γ') $A' = 2d$

9. Στην ελεύθερη άκρη ελατηρίου σταθεράς k σε πλάγιο επίπεδο γωνίας θ ισορροπούν σώματα m_1 και m_2. Συμπιέζουμε το ελατήριο με τα σώματα κατά d από την θέση ισορροπίας και τα αφήνουμε ελεύθερα να κάνουν α.α.τ. Η μέγιστη συμπίεση d που μπορούμε να πετύχουμε χωρίς το m_2 να χάσει την επαφή του με το m_1, είναι:



(α') $d = \frac{(m_1+m_2)g\,\text{ημ}\,\theta}{k}$ (β') $d = \frac{m_1 g\,\text{ημ}\,\theta}{k}$ (γ') $d = \frac{m_2 g\,\text{ημ}\,\theta}{k}$

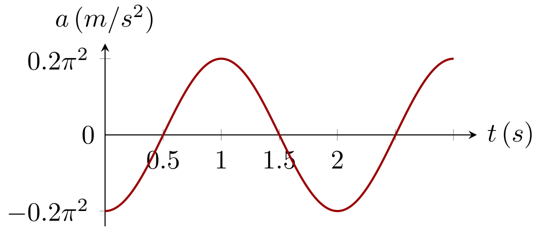
10. Σώμα κάνει φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης της μορφής $F' = -bv$. Όταν το πλάτος ταλάντωσης του σώματος μειωθεί κατά 50%, η ενέργεια της ταλάντωσης θα μειωθεί κατά:

(α') 50% (β') 75% (γ') 90%

11. Σώμα μετέχει σε δύο αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση με ίδια πλάτη και συχνότητες που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, για τις οποίες ισχύει $\omega_2 - \omega_1 = 2\pi$. Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται 100 φορές μέσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους της ιδιόμορφης ταλάντωσης. Οι συχνότητες των ταλαντώσεων είναι (σε Hz):

(α') $f_1 = 49,\ f_2 = 51$ (β') $f_1 = 49.5,\ f_2 = 50.5$ (γ') $f_1 = 99.5,\ f_2 = 100.5$

12. Σύστημα ελατηρίου-σώματος κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από το διπλανό διάγραμμα.
Η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος είναι:



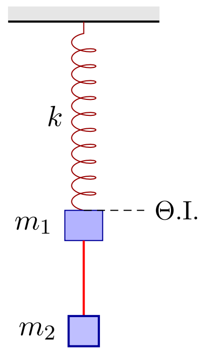
(α΄) $x = 0.2\,\eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2})$ (β΄) $x = 0.2\pi\,\eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2})$ (γ΄) $x = 0.2\,\eta\mu(\pi t + \frac{3\pi}{2})$

13. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και με συχνότητες $f_1 = 200$Hz και f_2. Μειώνουμε τη συχνότητα f_2 κατά 8Hz και παρατηρούμε ότι ο αριθμός των διακροτημάτων που παράγονται ανά δευτερόλεπτο παραμένει ο ίδιος. Η συχνότητα f_2 έχει τιμή:

(α΄) 192 Hz (β΄) 196 Hz (γ΄) 204 Hz (δ΄) 208 Hz

1.1.2 Ασκήσεις

1. Σώμα μάζας $m_1 = 1$kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 100$N/m. Στο σώμα m_1 είναι δεμένο μέσω νήματος δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 3$kg. Το σύστημα των δύο σωμάτων απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας τους προς τα κάτω και αφήνεται ελεύθερο, οπότε κάνει αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνεται $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.



(α΄) Να υπολογίσετε την μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου για την οποία το νήμα δεν χαλαρώνει κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

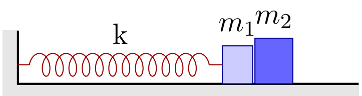
(β΄) Να βρείτε εξίσωση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο, αν $A = 0,4$m.

(γ΄) Να υπολογίσετε την ταχύτητα v_1 των σωμάτων όταν η τάση του νήματος έχει μέτρο 15 N για δεύτερη φορά.

Κάποια χρονική στιγμή που το σύστημα διέρχεται από τη Θ.Ι. με αρνητική ταχύτητα, το νήμα κόβεται και το σώμα m_2 απομακρύνεται.

(δ΄) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος κατά την απομάκρυνση του σώματος m_2.

2. Οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K = 300\,N/m$ είναι δεμένο στη μία άκρη του σε σταθερό σημείο και στην άλλη άκρη του σε σώμα μάζας $m_1 = 3\,Kg$. Το σώμα m_1 εφάπτεται χωρίς να είναι κολλημένο με σώμα m_2 και τα δύο σώματα ηρεμούν. Θεωρούμε το επίπεδο της κίνησης λείο. Το σώμα m_1 δέχεται οριζόντια δύναμη προς το μέρος του ελατηρίου μέτρου $F = 25\,N$ η οποία καταργείται όταν το ελατήριο συμπιεστεί κατά $\alpha = 6\,cm$. Μετά την κατάργηση της δύναμης το σώμα m_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και γυρίζοντας στην αρχική του θέση, συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο σώμα m_2.



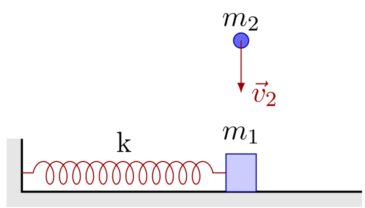
(α΄) Να βρεθεί η αρχική μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β΄) Να βρεθεί η ταχύτητα το συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και η μάζα m_2, αν το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας κατά την κρούση είναι 25%.

(γ΄) Να βρεθεί το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(δ΄) Να υπολογιστεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος όταν αυτό διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση $x_1 = \frac{A'\sqrt{3}}{2}$, όπου A' το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

3. Οριζόντιο ελατήριο, σταθεράς $k = 100\, N/m$, είναι δεμένο από σταθερό σημείο ενώ στην άλλη άκρη του είναι δεμένο σώμα μάζας $m = 1\, kg$. Το ελατήριο εκτρέπεται συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $d = 20\, cm$ και αφήνεται ελεύθερο. Την ίδια στιγμή αφήνεται από κατάλληλο ύψος ένα σώμα $m_2 = 3\, kg$ που συναντά και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_1 όταν αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.



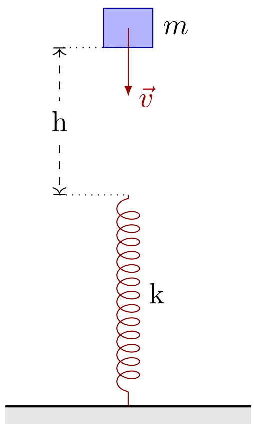
(α΄) Να βρεθεί το ύψος h.

(β΄) Να βρεθεί το νέο πλάτος και η εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(γ΄) Να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση, και το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης.

(δ΄) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}A$ για δεύτερη φορά.

4. Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\, N/m$ είναι σταθερά δεμένο στο έδαφος. Πάνω από την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου αφήνουμε από ύψος $h = 0,15\, m$ ένα σώμα μάζας $m = 1\, kg$. Το σώμα πέφτει ελεύθερα και καρφώνεται στην ελεύθερη άκρη του ελατηρίου (χωρίς απώλειες ενέργειας).



(α΄) Να βρείτε την μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β΄) Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του συστήματος $x = f(t)$, θεωρώντας θετική την φορά προς τα επάνω.

(γ΄) Να βρείτε την δύναμη επαναφοράς και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση που συμβαίνει $K = 3U$ για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

(δ΄) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην παραπάνω θέση.

5. Το πίσω (μονό) αμορτισέρ μίας μηχανής συμπεριφέρεται ως ιδανικό ελατήριο σταθεράς k. Αν αγνοήσουμε το εμπρός αμορτισέρ, τότε όταν κάθεται ο οδηγός μάζας $m = 80$kg αυτό συμπιέζεται κατά 5cm.

(α΄) Υπολογίστε τη σταθερά k του αμορτισέρ.

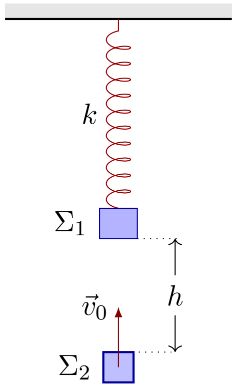
(β΄) Υποθέτουμε ότι το ελατήριο του αμορτισέρ συγκρατεί συνολικά μάζα $m_{o\lambda} = 160$kg. Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης της μηχανής.

(γ΄) Φυσικά το αμορτισέρ μίας μηχανής δέν πρέπει να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Γι' αυτό και εισάγουμε απόσβεση στο αμορτισέρ (μέσω κάποιου υγρού) με σταθερά b, έτσι ώστε να υπάρχει δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\alpha\pi} = -bv$. Εκτιμήστε τη σταθερά b έτσι ώστε να χάνεται το 99,99% της ενέργειας ταλάντωσης σε μία περίοδο T. Δίνεται ότι η σταθερά Λ της εκθετικής μείωσης συνδέεται με τη σταθερά b με τη σχέση $\Lambda = \frac{b}{2m}$.

(δ΄) Η μηχανή κινούμενη με ταχύτητα υ περνάει από δρόμο με διαδοχικά εμπόδια (πχ τα ανακλαστικά "μάτια γάτας" στη διπλή γραμμή) που απέχουν το ένα από το άλλο 80cm, με αποτέλεσμα να κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Βρείτε την ταχύτητα υ ώστε να έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους ταλάντωσης. (Φυσικά αυτή πρέπει να είναι η ταχύτητα *που πρέπει να αποφεύγει ο οδηγός!*)

Δίνονται: $\ln 5 = 1,61$, $\ln 2 = 0,69$.

6. Σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = m = 1\text{kg}$, ισορροπεί δεμένο στην κάτω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 900\text{N/m}$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη σε οροφή. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = m = 1\text{kg}$, βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω, με ταχύτητα $\upsilon_0 = 6\text{m/s}$, από σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $h = 1,35\text{m}$ κάτω από το σώμα Σ_1.
Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά ελαστικά την $t = 0$ και στη συνέχεια το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.
Να βρείτε:



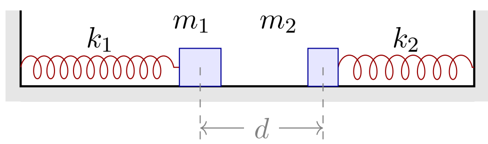
(α΄) Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_1.

(β΄) Την θέση του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 γίνεται για 1η φορά ελάχιστη.

(γ΄) Την μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά την ταλάντωση του σώματος.

(δ΄) Τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1, τη στιγμή που η ταχύτητά του είναι $\upsilon = -\dfrac{\upsilon_{max}}{2}$ για πρώτη φορά.

7. Δύο σώματα[1] με μάζες $m_1 = 1\ kg$ και $m_2 = 3\ Kg$ ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = 100\ N/m$ και $k_2 = 50\ N/m$ αντίστοιχα, απέχοντας απόσταση $d = 0,3\ m$. Εκτρέπουμε το σώμα m_1 προς τα αριστερά κατά $A = 0,5\ m$ και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ΑΑΤ.



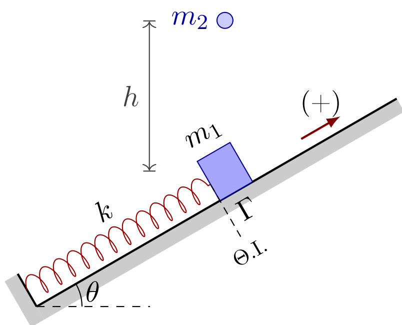
Το σώμα m_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_2. Να βρεθούν:

(α΄) Η ταχύτητα του m_1 πριν την κρούση και η κοινή ταχύτητα των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

(β΄) Η ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση.

(γ΄) Το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας κατά την κρούση.

8. Σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi = 30°$ ισορροπεί σώμα μάζας $m_1 = 3\ kg$ σε ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{N/m}$. Από ύψος $h = 2.4\text{m}$ πάνω από το σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα δεύτερο σώμα μάζας $m_1 = 1$ kg. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική, γίνεται την χρονική στιγμή $t = 0$ και το συσσωμάτωμα ξεκινά απλή αρμονική ταλάντωση. Να θεωρηθεί θετική φορά προς τα επάνω στο κεκλιμένο.



λδ΄

(α′) Να υπολογιστεί η κοινή ταχύτητα των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

(β′) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής του σώματος m_2 κατά την κρούση.

(γ′) Γράψτε την εξίσωση της απομάκρυνσης $x = f(t)$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(δ′) Να βρείτε σε πόσο χρονικό διάστημα το συσσωμάτωμα θα επιστρέψει στην θέση της κρούσης.

9. Ένα σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι οποίες εξελίσσονται πάνω στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και περιγράφονται από τις εξισώσεις στο S.I.

$$x_1 = 0,1\sqrt{3}\,\text{ημ}\left(10t + \frac{\pi}{6}\right), \quad x_2 = 0,1\,\text{ημ}\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

(α′) Να υπολογίσετε το πλάτος A' της σύνθετης ταλάντωσης.

(β′) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει τη θέση του σώματος σε σχέση με το χρόνο, $x = f(t)$.

(γ′) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{60}$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{10}$ s.

(δ′) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος στη θέση όπου η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

10. Σώμα εκτελεί φθίνουσα μηχανική ταλάντωση, το πλάτος της οποίας δίνεται από τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, με $A_0 = 16\text{cm}$. Μετά από 10 πλήρεις ταλαντώσεις το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι 75%.

(α′) Να βρείτε το πλάτος εκείνη τη χρονική στιγμή, καθώς και την τιμή της σταθεράς Λ, αν η περίοδος είναι $T = 0,1\text{s}$.

(β′) Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $30T$;

(γ′) Αν η δύναμη αντίστασης δίνεται από τη σχέση $F' = -0,2v$, να βρείτε το ρυθμό μείωσης της ενέργειας του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $10T$, αν θεωρήσουμε ότι εκείνη τη στιγμή το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. της ταλάντωσής του.

Δίνεται $\pi^2 = 10$ και $\ln 2 = 0,7$.

Βιβλιογραφία

[1] Διονύσιος Μάργαρης. Υλικό φυσικής - χημείας, https://ylikonet.gr, 2018.