Φθίνουσα ταλάντωση

Οι εξισώσεις

Φθίνουσα είναι μία ταλάντωση στην οποία το πλάτος μειώνεται με τον χρόνο λόγω τριβών, αντιστάσεων, κτλ.

Όταν η δύναμη αντίστασης είναι της μορφής $F' = -bv$ τότε το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο: $A(t) = A_0 e^{-\Lambda t}$

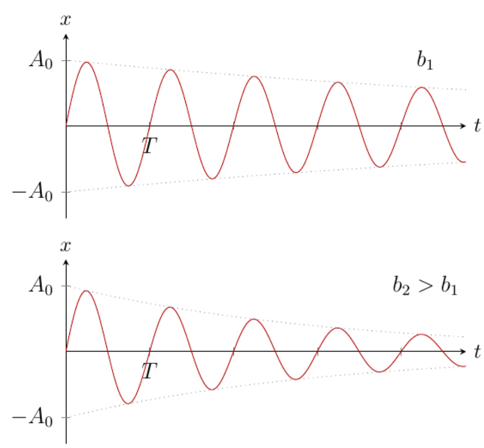
b: Συντελεστής απόσβεσης, εξαρτάται από το **σχήμα** και το **μέγεθος** του αντικειμένου που ταλαντώνεται και από **τις ιδιότητες του μέσου** στο οποίο γίνεται η ταλάντωση. Μονάδα: $\mathrm{kg s^{-1}}$

Λ: Σταθερά που εξαρτάται από **την σταθερά απόσβεσης** b και **την μάζα** του σώματος. Μονάδα $\mathrm{s^{-1}}$

Ισχύει: $\dfrac{A_0}{A_1} = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{A_2}{A_3} = \cdots =$ σταθερά

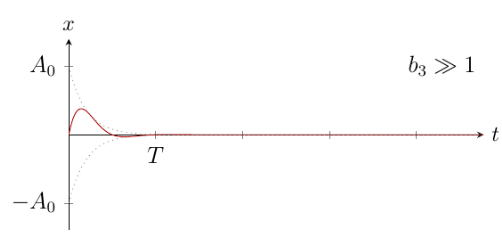
Για δεδομένο b η περίοδος μένει **σταθερή** και ανεξάρτητη του πλάτους (που μειώνεται)

Όταν αυξάνεται το b: - Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους **αυξάνεται** (δηλαδή το πλάτος μειώνεται γρηγορότερα)



Σχήμα 1: Φθίνουσα Ταλάντωση με διαφορετικές τιμές σταθεράς b

- Η περίοδος **αυξάνεται λίγο** (αλλά μπορούμε να την αγνοήσουμε)
- Για **πολύ μεγάλες τιμές του** b η ταλάντωση γίνεται **απεριοδική**, δηλαδή δεν ξεπερνά τη θέση ισορροπίας



Σχήμα 2: Φθίνουσα Ταλάντωση με πολύ μεγάλο b

Περισσότερες εξισώσεις

Σε φθίνουσα ταλάντωση η συνισταμένη δύναμη είναι:

$\Sigma F = -Dx - bv$ (1)

και επειδή *πάντα ισχύει ο β' νόμος του Νεύτωνα*

$ma = -Dx - bv$ (2)

Η εξίσωση απομάκρυνσης είναι

$x(t) = A_0 e^{-\Lambda t} \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ (3)

και αντίστοιχα της ταχύτητας, επιτάχυνσης.

Ισχύει: $\dfrac{E_0}{E_1} = \dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{E_2}{E_3} = \cdots =$ σταθερά

Χρονική εξίσωση Ενέργειας $E(t) = E_0 e^{-2\Lambda t}$ (4)

Προκύπτει από την εξίσωση του πλάτους:

$A(t) = A_0 e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow A^2(t) = A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} D A^2(t) = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Leftrightarrow E(t) = E_0 e^{-2\Lambda t}$

Ποσοστά

Ποσοστό μείωσης πλάτους στην πρώτη περίοδο:

$\pi\% = \dfrac{A_0 - A_1}{A_0} 100\% = \left(1 - \dfrac{A_1}{A_0}\right) 100\%$ (5)

και επειδή $\dfrac{A_0}{A_1} = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{A_2}{A_3} = \cdots = \dfrac{A_{n-1}}{A_n}$ αυτό **το ποσοστό είναι το ίδιο για οποιαδήποτε περίοδο**. Και γενικότερα για οποιαδήποτε ίδια χρονικά διαστήματα...

Απόδειξη:

Έστω A_0 το πλάτος στην αρχή και A_1 το πλάτος μετά από κάποιο τυχαίο χρονικό διάστημα τ. Τότε θα ισχύει:

$A_1 = A_0 e^{-\Lambda \tau}$

Το επόμενο χρονικό διάστημα τ (δηλαδή 2τ από την αρχή) θα έχουμε:

$A_2 = A_0 e^{-\Lambda 2\tau} = A_0 e^{-2\Lambda \tau} = A_0 e^{-\Lambda \tau} e^{-\Lambda \tau} = \underbrace{A_0 e^{-\Lambda \tau}}_{A_1} e^{-\Lambda \tau} = A_1 e^{-\Lambda \tau}$

Δηλαδή ισχύει: $A_2 = A_1 e^{-\Lambda \tau}$

που συνεπάγεται: $\dfrac{A_0}{A_1} = \dfrac{A_1}{A_2} = \cdots = e^{\Lambda \tau}$

Ποσοστό μείωσης ενέργειας σε μία περίοδο:

$\pi\% = \dfrac{E_{n-1} - E_n}{E_{n-1}} 100\% = \left(1 - \dfrac{E_n}{E_{n-1}}\right) 100\%$ (6)

Τα δύο ποσοστά σχετίζονται αφού $\dfrac{E_{n-1}}{E_n} = \dfrac{\frac{1}{2} D A_{n-1}^2}{\frac{1}{2} D A_n^2} = \left(\dfrac{A_{n-1}}{A_n}\right)^2$ (7)

Ρυθμός μείωσης ενέργειας

Είναι η ισχύς της δύναμης αντίστασης, και ο **ρυθμός παραγωγής θερμότητας**, αν βάλουμε απόλυτα:

$\frac{dE}{dt} = -F'v = -bv^2$ (8)

Ο ρυθμός μείωσης (και μεταβολής) ενέργειας δεν είναι σταθερός, αλλά μειώνεται εκθετικά και αυτός, αφού ουσιαστικά είναι η χρονική παράγωγος της ενέργειας και η εκθετική συνάρτηση παραμένει εκθετική μετά την παράγωγο (εξ ού και το ανέκδοτο: Σε ένα μπαρ που τα πίνανε οι συναρτήσεις ξαφνικά μπαίνει μέσα η παράγωγος...)

$\frac{dE}{dt} = -2\Lambda E_0 e^{-2\Lambda t}$

Έργο δύναμης αντίστασης

Είναι η μεταβολή της ενέργειας ταλάντωσης και είναι πάντα αρνητικό:

$W_{F'} = \Delta E = E(t_2) - E(t_1)$ (9)

Λογάριθμοι, εκθετικά και όλα αυτά

Θυμίζουμε τις βασικές ιδιότητες:

- $k \ln x = \ln(x^k)$
- $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$

(α) Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1-1, δηλαδή:

$\ln(5) = \ln(2t) \Leftrightarrow 5 = 2t$

$2^{-4} = 2^{-0.2t} \Leftrightarrow -4 = -0.2t$

$e^{-3} = e^{-4t} \Leftrightarrow -3 = -4t$

(β) Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση είναι αντίστροφες συναρτήσεις, δηλαδή:

$\ln e^x = x$ (10)

$e^{\ln x} = x$ (11)

Την πρώτη την χρησιμοποιούμε για να λογαριθμίσουμε και τα δύο μέλη μίας εξίσωσης:

$16 = 32e^{-\Lambda 10} \Leftrightarrow \frac{16}{32} = e^{-\Lambda 10} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda 10} \overset{\ln}{\Longleftrightarrow} \ln(\frac{1}{2}) = \ln e^{-10\Lambda}$

$\Leftrightarrow -\ln 2 = -10\Lambda \Leftrightarrow \Lambda = 0.1 \ln 2 \text{ s}^{-1}$

Την δεύτερη την εκμεταλλευόμαστε ως εξής:

Έστω ότι έχουμε $A = 32e^{-(2\ln 2)t}$ (A σε cm, t σε s) και θέλουμε να βρούμε το πλάτος την χρονική στιγμή $t = 2$ s.

$A = 32e^{-(2\ln 2)2} = 32e^{-4\ln 2} = 32e^{\ln(2^{-4})} = 32 \cdot 2^{-4} = \frac{32}{2^4} = \frac{32}{16} = 2 \text{ cm}$

αλλά και

$1 = 32e^{-(0,1\ln 2)t} \Leftrightarrow 1 = 32e^{(-0,1t)\ln 2} \Leftrightarrow 1 = 32e^{\ln(2^{-0,1t})} \Leftrightarrow 1 = 32 \cdot 2^{-0,1t}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2^5} = 2^{-0,1t} \Leftrightarrow 2^{-5} = 2^{-0,1t} \Leftrightarrow -5 = -0,1t \Leftrightarrow t = 50 \text{ s}$

και τώρα είμαστε έτοιμοι να λύσουμε οτιδήποτε!