# 1 Σύνθεση Ταλαντώσεων

## 1.1 Βασική θεωρία

Αν ένα σώμα μετέχει σε δύο (ή περισσότερες) ταλαντώσεις τότε από την *αρχή της επαλληλίας* μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνολική του απομάκρυνση $x$ είναι :

$$x = x_1 + x_2 \tag{1}$$

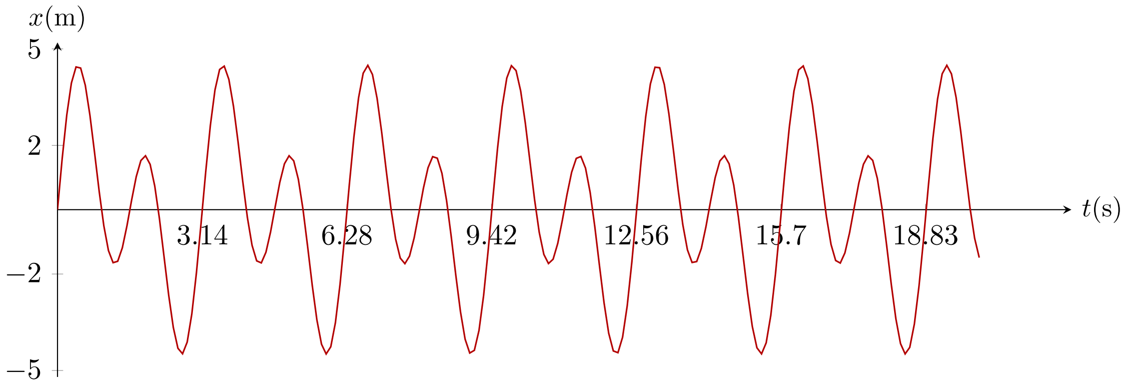
(αλλά και η συνολική του ταχύτητα είναι $v = v_1 + v_2$ και η συνολική του επιτάχυνση είναι $a = a_1 + a_2$)

Αν

$$x_1 = A_1 \eta\mu \omega_1 t \tag{2}$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu \left(\omega_2 t + \varphi\right) \tag{3}$$

τότε η συνολική είναι $x = A_1\eta\mu(\omega_1 t) + A_2\eta\mu(\omega_2 t + \varphi)$ και τίποτα άλλο δεν μπορεί να γίνει... Η συνολική ταλάντωση είναι περιοδική, αλλά όχι αρμονική.




Γραφική παράσταση της ταλάντωσης $x = 2\,\eta\mu(2t) + 3\,\eta\mu(4t)$ (SI)

### 1.1.1 Ίδιες συχνότητες $\omega$

Αν οι ταλαντώσεις έχουν ίδιες συχνότητες

$$x_1 = A_1 \eta\mu \omega t \tag{4}$$
$$x_2 = A_2 \eta\mu \left(\omega t + \varphi\right) \tag{5}$$

τότε:

- Η συνολική ταλάντωση είναι απλή αρμονική με την ίδια συχνότητα $\omega$.
- Το πλάτος $A'$ της συνολικής ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο:

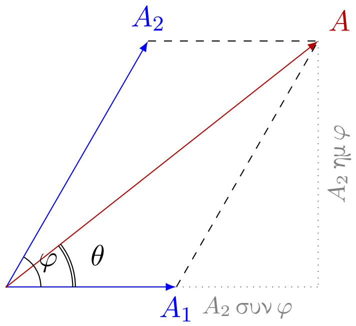
$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \tag{6}$$

- Η αρχική φάση $\theta$ της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\text{εφ}\theta = \frac{A_2 \text{ημ}\varphi}{A_1 + A_2 \text{συν}\varphi} \tag{7}$$

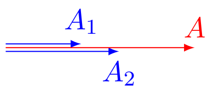
- Η εξίσωση της ολικής ταλάντωσης είναι τελικά:

$$x = A' \text{ημ}(\omega t + \theta) \tag{8}$$




**A1. Ειδική περίπτωση όπου $\varphi = 0$**

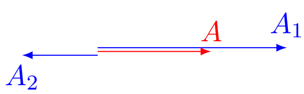
Τότε $A' = A_1 + A_2$ και $\theta = 0$: εξίσωση $x = A' \text{ημ}\omega t$



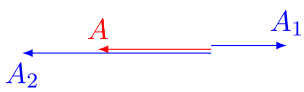

**A2. Ειδική περίπτωση όπου $\varphi = \pi$**

Τότε $A = \|A_1 - A_2\|$ και:

- Αν $A_1 > A_2$ : $\theta = 0$ και εξίσωση $x = A' \text{ημ}\omega t$

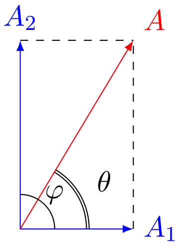



- Αν $A_1 < A_2$ : $\theta = \pi$ και εξίσωση $x = A' \text{ημ}(\omega t + \pi)$




**A3. Ειδική περίπτωση όπου $\varphi = \frac{\pi}{2}$** (Θέλει απόδειξη)

Τότε $A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ και $\text{εφ}\theta = \dfrac{A_2}{A_1}$: εξίσωση $x = A' \text{ημ}(\omega t + \theta)$




(Αυτά υπολογίζονται με τους τύπους (6) και (7) αφού τότε το συνφ=0 και το ημφ=1, αλλά καλό είναι να ξέρουμε από πριν το αποτέλεσμα...)

**Αν και οι δύο ταλαντώσεις έχουν αρχική φάση** Σε αυτή την περίπτωση:

Υπολογίζουμε την γωνία μεταξύ των δύο ταλαντώσεων:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{9}$$

Στους τύπους (6) και (7) βάζουμε αυτή τη διαφορά αντί της $\varphi$

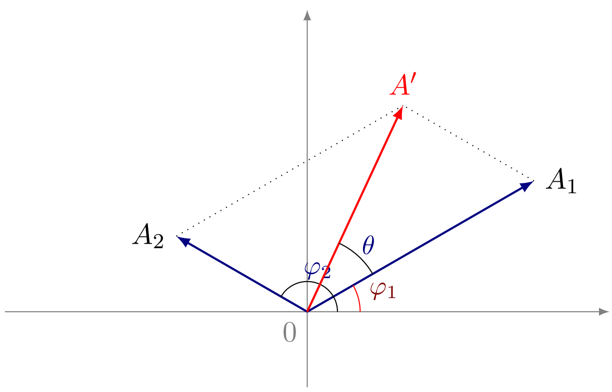
$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\text{συν}(\Delta\varphi)} \tag{10}$$

$$\text{εφ}\theta = \frac{A_2\text{ημ}(\Delta\varphi)}{A_1 + A_2\text{συν}(\Delta\varphi)} \tag{11}$$

Και τελικά η συνολική ταλάντωση έχει εξίσωση:

$$x = A'\text{ημ}(\omega t + \varphi_1 + \theta) \tag{12}$$

Το παρακάτω σχήμα (που φαίνονται τα περιστρεφόμενα διανύσματα των ταλαντώσεων την χρονική στιγμή $t = 0$) είναι διευκρινιστικό.




Οι θέσεις των περιστρεφόμενων την χρονική στιγμή $t = 0$

**Περί ενεργειών στη σύνθεση**

Η αρχή της επαλληλίας ΔΕΝ ισχύει για τις ενέργειες των ταλαντωτών. Δηλαδή $E_1 + E_2 \neq E$, παρά μόνο σε μία ειδική περίπτωση:

Από τον τύπο για το πλάτος της σύνθεσης $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \,\text{συν}\, \Delta\varphi$ έχουμε πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{2}D$:

$E = E_1 + E_2 + 2\frac{1}{2}DA_1A_2 \,\text{συν}\,\Delta\varphi \Leftrightarrow E = E_1 + E_2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{D}A_1\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{D}A_2 \,\text{συν}\,\Delta\varphi$

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}\,\text{συν}\,\Delta\varphi \tag{13}$$

Από όπου είναι φανερό ότι η εξίσωση $E = E_1 + E_2$ ισχύει μόνο όταν ημ $\Delta\varphi = 0$ ή για γωνίες $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ ή $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

### 1.1.2 Ίσα πλάτη - διαφορετικές συχνότητες

Στην περίπτωση αυτή έστω ότι έχουμε τις ταλαντώσεις:

$$x_1 = A\text{ημ}\omega_1 t \tag{14}$$

$$x_2 = A\text{ημ}\omega_2 t \tag{15}$$

τότε η συνολική είναι

$$x = A\text{ημ}(\omega_1 t) + A\text{ημ}(\omega_2 t) = [\text{ημ}(\omega_1 t) + \text{ημ}(\omega_2 t)] \tag{16}$$

Με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας: $\text{ημ}(A) + \text{ημ}(B) = 2\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{ημ}\left(\frac{A+B}{2}\right)$ μετατρέπεται στην:

$$x = 2A\text{συν}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\text{ημ}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \tag{17}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ακριβής, αλλά δεν περιγράφει απλή αρμονική.

**Αν οι συχνότητες $\omega_1$ και $\omega_2$ διαφέρουν λίγο** Τότε ο όρος $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ είναι πολύ μικρός, άρα η συχνότητα είναι μικρή και η περίοδος μεγάλη. Αυτό σημαίνει ότι το συνημίτονο μεταβάλλεται αργά, επομένως μπορούμε να το ενσωματώσουμε μέσα στο $2A$ και να έχουμε ένα *πλάτος που μεταβάλλεται αργά*.

Επίσης ο όρος $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ είναι ουσιαστικά η μέση τιμή $\bar{\omega}$ των συχνοτήτων, άρα ο όρος του ημιτόνου περιγράφει ταλάντωση με συχνότητα $\bar{\omega}$.

Τελικά:

$$x = A'\text{ημ}(\bar{\omega}t) \tag{18}$$

με

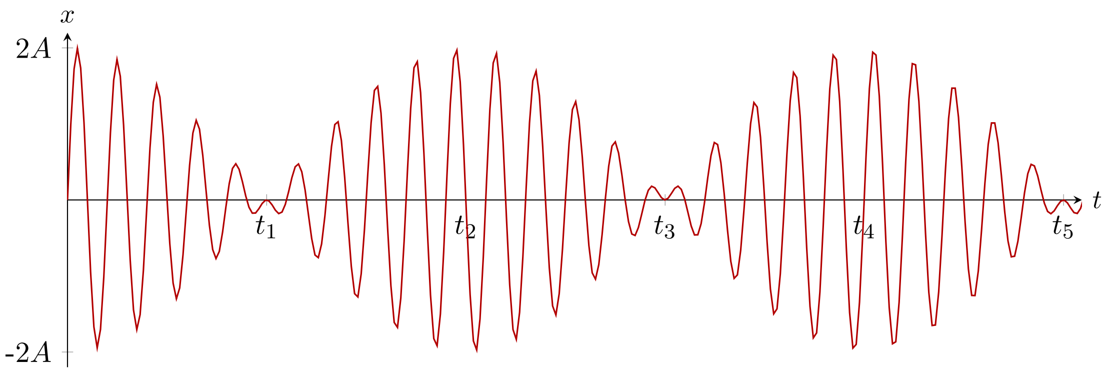
$$A' = 2A\text{συν}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \tag{19}$$

**Η ταλάντωση δεν είναι απλή αρμονική** γιατί ο όρος $A'$ μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Το πλάτος $A'$ αυξομειώνεται μεταξύ των τιμών $0$ και $2A$, και λέμε ότι το πλάτος παρουσιάζει **διακροτήματα**.

Αν μας ζητάνε το πλάτος κάποια χρονική στιγμή τότε

$$A' = 2A\left|\text{συν}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right| \tag{20}$$




Περίοδος διακροτήματος είναι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών *του πλάτους* (δηλαδή στο σχήμα $T_\delta = t_3 - t_2$). Αποδεικνύεται ότι:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \tag{21}$$

και

$$f_\delta = |f_1 - f_2| \tag{22}$$

Απόδειξη:

Το πλάτος $A' = \left|2A\text{συν}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\right|$ μηδενίζεται όταν το $\left|\text{συν}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\right| = 0$ δηλαδή όπου το όρισμα $\left(\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}t\right) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ..., (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (απόλυτο στις συχνότητες γιατί το βγάλαμε από συνημίτονο!)

Οι δύο πρώτες λύσεις για τους χρόνους είναι: $t_1 = \frac{1}{2|f_1 - f_2|}$ και $t_1 = \frac{3}{2|f_1 - f_2|}$ και η διαφορά τους είναι η περίοδος του διακροτήματος $t_2 - t_1 = T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$

Η **περίοδος ταλάντωσης** βρίσκεται από την συχνότητα $\bar{\omega}$ της ταλάντωσης

$$T_{\text{ταλ}} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \tag{23}$$

και μετά από τις πράξεις:

$$T_{\text{ταλ}} = \frac{2}{f_1 + f_2} \tag{24}$$

Από τις σχέσεις (21) και (23) μπορούμε να βρούμε πόσες ταλαντώσεις κάνει το σώμα σε μία περίοδο διακροτήματος:

Αριθμός ταλαντώσεων $N = \frac{T_\delta}{T_{\text{ταλ}}} \Leftrightarrow N = \frac{f_1 + f_2}{2|f_1 - f_2|}$