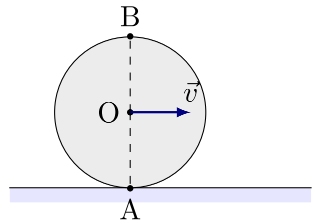
4.1 Επανάληψη - Στερεό (Περικομμένη Ύλη 2021)

Μερικές ερωτήσεις με δικαιολόγηση και λίγα προβλήματα για επανάληψη στο Στερεό. Αρχικά, για χρήση στην εξ' αποστάσεως εκπαίδευση λόγω κορονοϊού (covid-19)...
Επιμέλεια: Γιώργος Χ. Παπαδημητρίου, Άδεια Creative Commons ©ⓘ⊚, Φεβρουάριος 2021

4.1.1 Ερωτήσεις

1. [1] Μια ρόδα αυτοκινήτου ακτίνας R κυλίεται με το κέντρο μάζας της να έχει σταθερή ταχύτητα v. Ένα μικρό καρφί μάζας m είναι καρφωμένο στην εξωτερική επιφάνεια της ρόδας. Αν θεωρήσουμε τις διαστάσεις του καρφιού αμελητέες, τότε η μεταβολή της ορμής του καρφιού, μεταξύ κατώτερης και ανώτερης θέσης είναι:



(α΄) 0 (β΄) mv (γ΄) $2mv$

2. Αυτοκίνητο επιβραδύνεται κινούμενο προς το Βορρά. Η γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση:

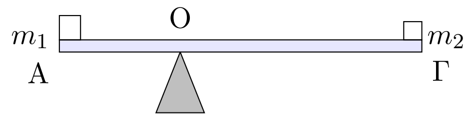
(α΄) Έχουν αντίθετες κατευθύνσεις με την α_γ να έχει ανατολική κατεύθυνση.

(β΄) Κατευθύνονται και οι δύο προς το νότο.

(γ΄) Έχουν αντίθετες κατευθύνσεις με την επιτάχυνση να έχει δυτική κατεύθυνση.

(δ΄) Έχουν αντίθετες κατευθύνσεις με την επιτάχυνση να έχει βόρεια κατεύθυνση.

3. Η δοκός ΑΓ του σχήματος, μάζας M στηρίζεται σε ένα σημείο της Ο και ισορροπεί όταν στα άκρα της Α και Γ τοποθετηθούν δύο μικρά σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 = M$.
Αν η απόσταση (ΟΑ) είναι ίση με το 1/3 της απόστασης (ΑΓ), ο λόγος $\dfrac{m_1}{m_2}$ είναι ίσος με



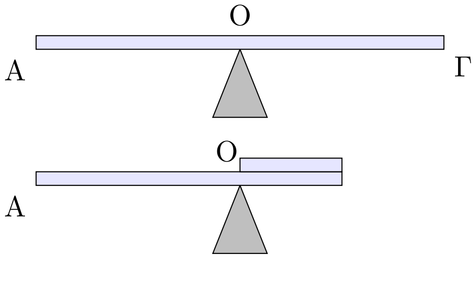
(α΄) $\dfrac{2}{1}$ (β΄) $\dfrac{3}{2}$ (γ΄) $\dfrac{3}{1}$

4. [1] Σε ένα ελεύθερο στερεό ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, από τις οποίες η δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στο κέντρο μάζας του στερεού. Το στερεό ισορροπεί. Αν καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$, το στερεό θα εκτελέσει:

(α΄) μεταφορική κίνηση. (β΄) στροφική κίνηση. (γ΄) σύνθετη κίνηση.

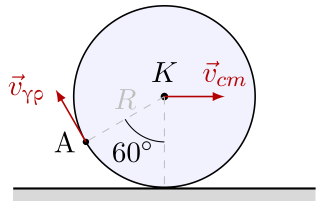
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. [1] Η ομογενής δοκός του σχήματος έχει μάζα M και μήκος L και ισορροπεί στηριγμένη σε σημείο στο μέσο της.
Κόβουμε τμήμα $L/4$ της ράβδου και το τοποθετούμε στο ένα άκρο της όπως φαίνεται στο σχήμα.
Η αναγκαία δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο άκρο Α ώστε η ράβδος να ισορροπεί είναι:



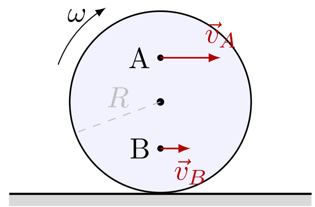
(α΄) $F = Mg/8$ (β΄) $F = Mg/2$ (γ΄) $F = Mg/4$

6. Δίσκος ακτίνας R κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας v_{cm}. Η συνολική ταχύτητα του σημείου Α του σχήματος είναι v.
Η σχέση της ταχύτητας v και της ταχύτητας του κέντου μάζας v_{cm} είναι:



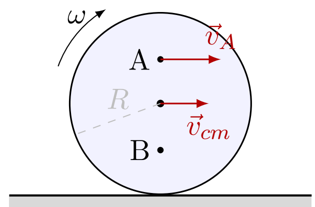
(α΄) $v = 2v_{cm}$ (β΄) $v = \sqrt{2}v_{cm}$ (γ΄) $v = v_{cm}$

7. Δίσκος ακτίνας R κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας v_{cm}. Σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο και απέχουν από αυτό απόσταση $R/2$. Η συνολική ταχύτητα του σημείου Α του σχήματος είναι v_A, ενώ του σημείου Β είναι v_B.
Η ταχύτητα του κέντου μάζας v_{cm} είναι:



(α΄) $v_{cm} = \dfrac{v_A + v_B}{2}$ (β΄) $v_{cm} = \dfrac{v_A - v_B}{2}$ (γ΄) $v_{cm} = \dfrac{v_A + v_B}{4}$

8. Δίσκος ακτίνας R κυλίεται *με ολίσθηση* σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια χρονική στιγμή έχει ταχύτητα κέντρου μάζας v_{cm}. Σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο και απέχουν από αυτό απόσταση $R/2$. Η συνολική ταχύτητα τότε του σημείου Α του σχήματος είναι v_A, ενώ του σημείου Β είναι μηδέν.



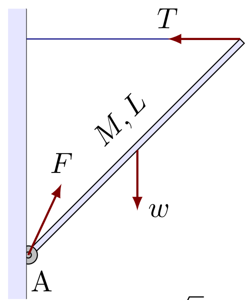
Α. Η ταχύτητα v_A είναι:

(α΄) $v_A = \dfrac{v_{cm}}{2}$ (β΄) $v_A = \sqrt{2}v_{cm}$ (γ΄) $v_A = 2cm$

Β. Η δύναμη της τριβής στο σημείο επαφής με το έδαφος, είναι:

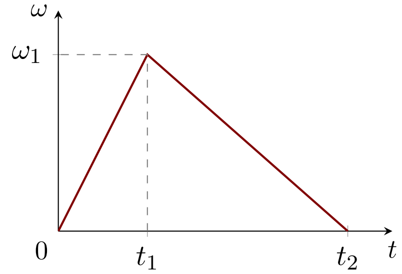
(α΄) προς τα δεξιά. (β΄) προς τα αριστερά. (γ΄) μηδέν.

9. [1] Η ομογενής ράβδος βάρους w του σχήματος στηρίζεται στην άρθρωση σχηματίζοντας γωνία $\theta = \pi/4$ με τον κατακόρυφο τοίχο και η άλλη άκρη είναι δεμένη μέσω οριζόντιου μη ελαστικού νήματος με τον τοίχο.
Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση έχει μέτρο



(α΄) $F = \dfrac{w}{2}$ (β΄) $F = \dfrac{3w}{2}$ (γ΄) $F = \dfrac{w\sqrt{5}}{2}$

10. Ένας οριζόντιος δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Για το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_1 - 0$ ασκείται σε αυτόν κατάλληλη ροπή που τον επιταχύνει και τη χρονική στιγμή t_1, αυτή καταργείται και ασκείται μια δεύτερη ροπή με αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή t_2 ο δίσκος να σταματήσει. Στο διπλανό σχήμα δείχνεται η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σε σχέση με το χρόνο.

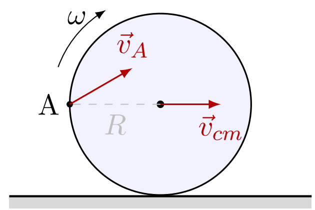


Ο δίσκος κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ εκτέλεσε διπλάσιο αριθμό στροφών σε σχέση με τις στροφές που εκτέλεσε κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_1 - 0$.

Ο λόγος των μέτρων των γωνιακών επιταχύνσεων $\frac{a_{\gamma 1}}{a_{\gamma 2}}$ είναι

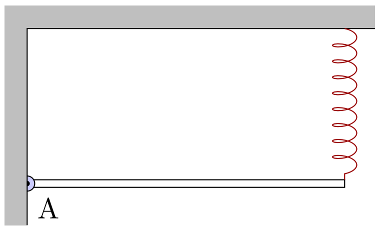
(α΄) 1/2 (β΄) 1/3 (γ΄) 2

11. Ο δίσκος του διπλανού σχήματος, ακτίνας R, κάνει σύνθετη κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο. Την στιγμή αυτή η ταχύτητα v_{cm} του κέντρου μάζας του έχει μέτρο 4 m/s και η ταχύτητα του σημείου A που βρίσκεται στην περιφέρεια και απέχει από το έδαφος απόσταση R, έχει μέτρο 5 m/s.
Η ταχύτητα του σημείου επαφής Γ με το έδαφος αυτή την στιγμή είναι:



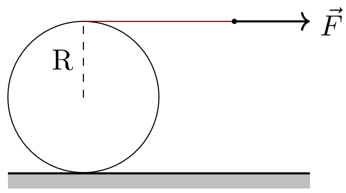
(α΄) 1 m/s (β΄) 3 m/s (γ΄) 4 m/s

12. Η ράβδος του σχήματος έχει μάζα M μήκος L και το κέντρο μάζας της βρίσκεται σε απόσταση $L/4$ από το άκρο που είναι προσδεδεμένο το ελατήριο σταθεράς k.
Αν η ράβδος ισορροπεί οριζόντια τότε η παραμόρφωση του ελατηρίου και η δύναμη από την άρθρωση είναι:



(α΄) $\Delta\ell = \frac{3Mg}{4k}$, $F = \frac{Mg}{4}$ (β΄) $\Delta\ell = \frac{Mg}{4k}$, $F = \frac{3Mg}{4}$ (γ΄) $\Delta\ell = \frac{Mg}{4k}$, $F = \frac{Mg}{4}$

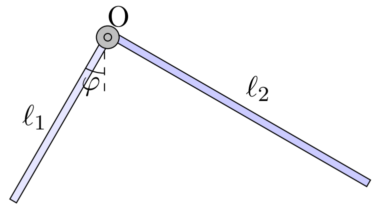
13. Στο αυλάκι ενός δίσκου ακτίνας R είναι τυλιγμένο λεπτό νήμα. Ένας άνθρωπος τραβά το άκρο του νήματος A με σταθερή ταχύτητα αναγκάζοντας τον κύλινδρο, που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, να πλησιάζει προς αυτόν.
Αν ℓ το μήκος του νήματος που έχει τραβήξει ο άνθρωπος, τότε ο δίσκος έχει πλησιάσει προς τον άνθρωπο κατά:



(α΄) ℓ (β΄) 2ℓ (γ΄) $\ell/2$ (δ΄) 4ℓ

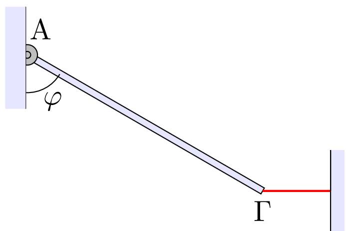
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

14. Οι ράβδοι του σχήματος είναι κάθετες μεταξύ τους και έχουν μήκη ℓ_1, και $\ell_2 = \sqrt{3}\ell_1$. Στην ισορροπία τους γύρω από σταθερό άξονα στο σημείο O η ράβδος ℓ_1 σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο. Η σχέση των βαρών των ράβδων είναι:



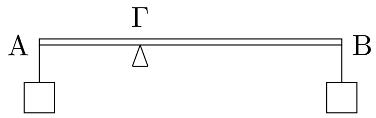
(α΄) $w_1 = 3w_2$ (β΄) $w_1 = w_2$ (γ΄) $w_1 = \sqrt{3}w_2$

15. Η ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ του παραπάνω σχήματος έχει μήκος L, βάρος w και είναι αρθρωμένη στο άκρο της A. Η ράβδος ισορροπεί σε γωνία $\varphi = 60°$ με τη βοήθεια οριζόντιου αβαρούς νήματος. Η δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση έχει μέτρο F_A ίσο με:



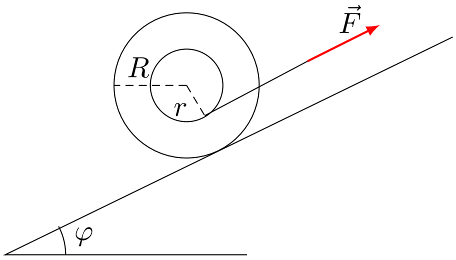
(α΄) $w\sqrt{2}$ (β΄) $w\sqrt{7}$ (γ΄) $\frac{w}{2}\sqrt{7}$ (δ΄) $\frac{w}{4}\sqrt{7}$

16. Σε αβαρή λεπτή ράβδο AB μήκους ℓ αναρτώνται δύο ομογενή σώματα ίδιων διαστάσεων από διαφορετικά υλικά. Η ράβδος ισορροπεί όταν στηριχθεί στο σημείο Γ όπου (ΑΓ)= $\frac{\ell}{3}$. Για τις πυκνότητες των σωμάτων ρ_1 (στο A) και ρ_2 ισχύει:



(α′) $\rho_1 = \rho_2$ (β′) $\rho_1 = 2\rho_2$ (γ′) $\rho_1 = 3\rho_2$

17. Το στερεό στο διπλανό σχήμα έχει συνολική μάζα M και αποτελείται από δύο δίσκους ακτίνας R και $r = \frac{R}{2}$ και ισορροπεί στο κεκλιμένο γωνίας φ. Στον εσωτερικό δίσκο είναι τυλιγμένο πολλές φορές νήμα στο οποίο ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη με το κεκλιμένο. Η τιμή της δύναμης $\vec{F}$ είναι:



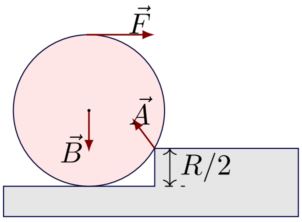
(α′) $F = \frac{1}{2}Mg\,\eta\mu\,\varphi$ (β′) $F = Mg\,\eta\mu\,\varphi$ (γ′) $F = 2Mg\,\eta\mu\,\varphi$

Αν το στερεό ισορροπεί οριακά τότε ο συντελεστής (στατικής) τριβής θα είναι:

(α′) $\mu = \varepsilon\varphi\,\varphi$ (β′) $\mu = \sigma\varphi\,\varphi$ (γ′) $\mu = 2\,\varepsilon\varphi\,\varphi$

Να δικαιολογηθούν οι απαντήσεις σας.

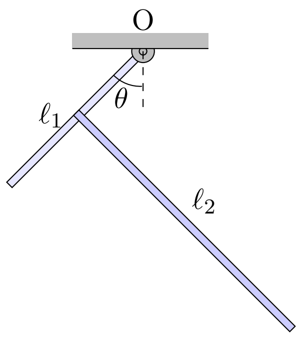
18. [1] Η ελάχιστη τιμή της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που πρέπει να ασκήσουμε στο υψηλότερο σημείο του τροχού (όπως φαίνεται στο σχήμα) ώστε να καταφέρει να υπερπηδήσει το εμπόδιο που έχει ύψος $h = R/2$ είναι:



(α′) $F = B\frac{\sqrt{2}}{2}$ (β′) $F = \frac{B}{2}$ (γ′) $F = B\frac{\sqrt{3}}{3}$

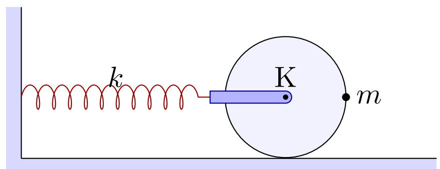
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

19. Δύο ομογενείς ράβδοι ίσου πάχους είναι φτιαγμένοι από το ίδιο υλικό και έχουν μήκη ℓ_1 και ℓ_2. Οι ράβδοι ενώνονται στέρεα και κάθετα στο μέσο της μικρότερης εξ' αυτών και το σύστημά τους αναρτάται σε άρθρωση αμελητέας τριβής από το άκρο της μικρότερης ράβδου, όπως στο σχήμα.
Να δείξετε ότι αν η γωνία θ είναι $45°$ τότε ο λόγος των μηκών $\frac{\ell_2}{\ell_1}$ των ράβδων ισούται με τον αριθμό φ της χρυσής τομής.



Η χρυσή τομή (golden ratio) ορίζεται ως $\frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \varphi$, ή αλλιώς ο λόγος του αθροίσματος προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με τον λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο μέρος. Επίσης ο αριθμός φ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$. Δηλαδή $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

20. [2] Στο παραπάνω σχήμα έχουμε ένα λεπτό δίσκο μάζας M, που στο άκρο Α της οριζοντίου διαμέτρου του ΑΒ έχει συγκολλημένη μια σημειακή μάζα $m = M$, και στο κέντρο Κ με κατάλληλη διάταξη, είναι δεμένο οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k. Το σύστημα ισορροπεί. Τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή; Δικαιολογείστε.

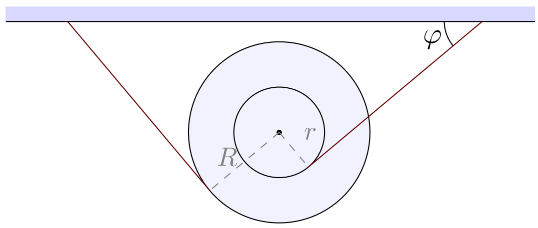


(α′) Το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος.

(β′) Το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell = \frac{mg}{k}$ και ο συντελεστής στατικής τριβής ικανοποιεί τη σχέση $\mu_s \geq 1$

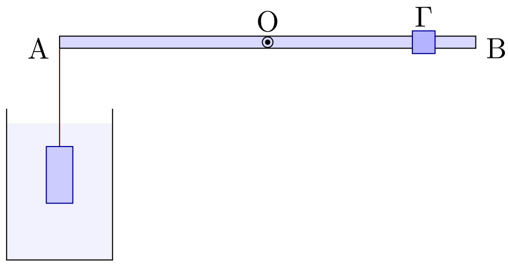
(γ΄) Το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell = \frac{mg}{k}$ και ο συντελεστής στατικής τριβής ικανοποιεί τη σχέση $\mu_s \geq \frac{1}{2}$

21. [2] Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται τροχαλία που φέρει εγκοπή ακτίνας $r = R/2$, όπου R η ακτίνα της. Έχουμε τυλίξει πολλές φορές αβαρή μη ελαστικά νήματα στην περιφέρεια και στην εγκοπή, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Η τροχαλία ισορροπεί.
Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι η σωστή για την γωνία φ;



(α΄) εφ $\varphi = \sqrt{2}$ (β΄) εφ $\varphi = \frac{1}{2}$ (γ΄) εφ $\varphi = 2$

22. [3] Ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους L μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το μέσο της Ο. Από το άκρο Α κρεμάμε μέσω αβαρούς νήματος κυλινδρικό σώμα ύψους h, εμβαδού διατομής A και πυκνότητας $\rho_\kappa = 8\rho_\nu$, όπου ρ_ν η πυκνότητα του νερού. Η ράβδος διαθέτει μετακινούμενο αντίβαρο Γ ώστε να επιτυγχάνεται ισορροπία. Όταν το σώμα είναι πλήρως βυθισμένο στο νερό, το αντίβαρο πρέπει να τοποθετηθεί σε απόσταση $3L/8$ από το μέσο Ο.



Επαναλαμβάνουμε το πείραμα με άλλο υγρό, άγνωστης πυκνότητας ρ_x και παρατηρούμε ότι το αντίβαρο πρέπει να μετακινηθεί σε απόσταση /4 από το μέσο της ράβδου Ο. Δίνονται τα ρ_ν, g, L, A.

(α΄) Η τάση του νήματος στο πρώτο πείραμα έχει μέτρο:

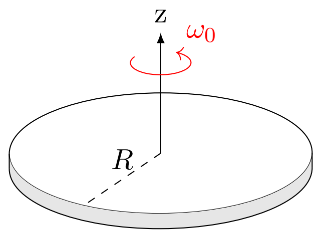
i. $T = (\rho_\kappa - \rho_\nu)ghA$ ii. $T = (\rho_\nu - \rho_\kappa)ghA$ iii. $T = \rho_\nu ghA$

(β΄) Η πυκνότητα του άγνωστου υγρού είναι:

i. $\rho_x = \dfrac{3}{10}\rho_\nu$ ii. $\rho_x = 4\rho_\nu$ iii. $\rho_x = \dfrac{10}{3}\rho_\nu$

4.1.2 Ασκήσεις

1. Ο ομογενής και ισοπαχής δίσκος του παρακάτω σχήματος περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 4$ rad/s. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ δέχεται σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{,1}$ και τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1 = 12$ rad/s. Αμέσως μετά αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{,2}$ και τη χρονική στιγμή $t_2 = 7$ s σταματά.



(α′) Να σχεδιαστούν σε δύο σχήματα η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση τις χρονικές στιγμές t_0 και t_1.

(β′) Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις $\omega = f(t)$ για όλη τη διάρκεια της κίνησης.

(γ′) Να γίνει το διάγραμμα $\omega = f(t)$ για όλη την κίνηση.

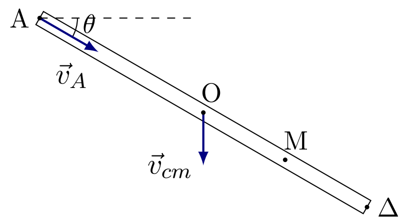
(δ′) Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός περιστροφών του δίσκου στη χρονική διάρκεια $0 \to t_1$.

(ε′) Να υπολογιστεί η γωνία στροφής $\Delta\theta$ κατά τη διάρκεια του 3ου δευτερολέπτου της επιβραδυνόμενης κίνησης του δίσκου.

(Ϛ′) Να γίνει το διάγραμμα της επιτρόχιας επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του δίσκου.

Δίνεται η ακτίνα του δίσκου $R = 2$m.

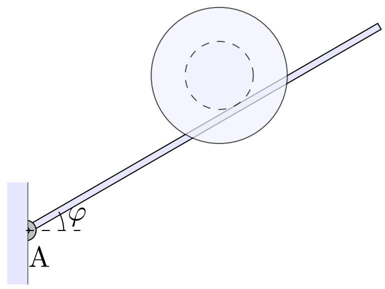
2. Μια λεπτή ομογενής ράβδος ΑΔ, μήκους 4m, πέφτει κατακόρυφα και σε μια στιγμή σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ (ημ $\theta = 0,6$), ενώ το άκρο της Α έχει ταχύτητα όπως στο σχήμα, με κατεύθυνση προς το άκρο Δ και μέτρου $v_A = 3$m/s. [4]



(α′) Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο της ράβδου καθώς και η γωνιακή της ταχύτητα.

(β′) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του μέσου Μ της ΟΒ.

3. Ένα καρούλι αποτελείται από ένα κύλινδρο ακτίνας $r = 0,1$m που στα άκρα του είναι κολλημένοι δύο κυκλικοί δίσκοι ακτίνας $R = 0,2$m. Το καρούλι αφήνεται στην κορυφή κεκλιμένου δοκού με τον κύλινδρο μόνο να εφάπτεται στη δοκό (οι κυκλικοί δίσκοι δεν έρχονται σε επαφή με την δοκό). Μια τομή του καρουλιού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αρχικά ακίνητο καρούλι αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_\gamma = 20\text{rad/s}^2$. Τη χρονική στιγμή t_1 το καρούλι έχει κάνει $80/\pi$ περιστροφές. Τη χρονική στιγμή t_1 ζητείται:



(α′) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του καρουλιού.

(β′) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του καρουλιού.

(γ′) Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του καρουλιού.

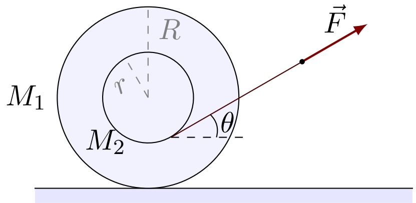
(δ΄) Η ταχύτητα του ανώτερου και του κατώτερου σημείου του δίσκου (κάθετα στην δοκό).

(ε΄) Ο απαραίτητος συντελεστής στατικής τριβής ώστε να επιτυγχάνεται κύλιση χωρίς ολίσθηση για γωνία φ.

(Ϛ΄) Η δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί η άρθρωση στη δοκό αν η γωνία φ είναι τέτοια ώστε $\text{ημ}\,\varphi = 0,8$ και $\text{συν}\,\varphi = 0,6$ και η μάζα του καρουλιού είναι 2Kg. Η δοκός να θεωρηθεί αβαρής.

(Απ: α) $\alpha_{cm} = 2\text{m/s}^2$ β) $\omega = 80\text{rad/s}$ γ) $v_{cm} = 8\text{m/s}$ δ) $v_\Gamma = 24\text{m/s}$, $v_A = 8\text{m/s}$, ε) $\mu = \text{εφ}\,\varphi - \frac{a_{cm}}{g\,\text{συν}\,\varphi}$, στ) $F = 12\sqrt{2}$, $\theta = 45°$ ως προς τη ράβδο)

4. Δύο δίσκοι μαζών $M_1 = 3\text{kg}$ και $M_2 = 2\text{kg}$ και ακτίνων $R = 0,5\text{m}$ και $r = 0,3\text{m}$ αντίστοιχα είναι σταθερά συνδεδεμένοι μεταξύ τους έτσι ώστε να είναι ομόκεντροι. Το σύστημα των δύο δίσκων ισορροπεί ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Γύρω από τον μικρό δίσκο είναι τυλιγμένο νήμα.

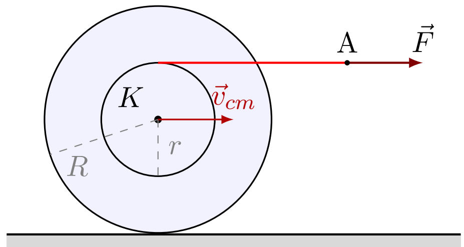


(α΄) Διερευνήστε εάν υπάρχει γωνία θ έτσι ώστε το σύστημα να ισορροπεί ασκώντας στο νήμα οποιαδήποτε δύναμη F (και υποθέτοντας ότι υπάρχει ικανή τριβή).

(β΄) Αν για μέτρο δύναμης $F = 40\text{N}$ η τριβή στο προηγούμενο ερώτημα είναι η οριακή τριβή, υπολογίστε τον συντελεστή στατικής τριβής συστήματος-εδάφους.

(γ΄) Για γωνία $\theta = 0^o$ και δύναμη $F = 40\text{N}$ η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά το σύστημα είναι $\alpha_\gamma = 14\text{rad/s}^2$. (i) Εξετάστε αν το σύστημα κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση. (ii) Αν το ξετυλιγμένο νήμα ήταν αρχικά μήκους $\ell = 6\text{m}$ πόση είναι η μετακίνηση του κέντρου μάζας των δίσκων μέχρι να τυλιχθεί όλο το νήμα;

5. Ένα ακίνητο στερεό αποτελείται από δύο κατακόρυφους ομοαξονικούς κυλίνδρους κολλημένους μεταξύ τους ακτίνων r και $R = 2r$. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κοινό οριζόντιο άξονα των δύο κυλίνδρων σαν ένα σώμα. Στην περιφέρεια του κυλίνδρου ακτίνας r έχουμε τυλίξει ένα λεπτό νήμα. Τραβάμε το νήμα οριζόντια από το άκρο του Α με επιτάχυνση $a_A = 6\ \text{m/s}^2$ ξετυλίγοντάς το χωρίς το νήμα να ολισθαίνει στην επιφάνεια του κυλίνδρου.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το στερεό αρχίζει να κυλίεται στο οριζόντιο έδαφος χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου a_γ.

(α΄) Πόση είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας a_{cm} του στερεού και η εφαπτομενική επιτάχυνση του ανώτατου σημείου Ε;

(β΄) Αν $r = 0,1\text{m}$, να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού.

(γ΄) Όταν έχει ξετυλιχθεί μήκος νήματος $\ell = 9$ m:

i. πόσο έχει μετακινηθεί το άκρο Α του νήματος και πόσο το κέντρο μάζας του στερεού;

ii. πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού;

iii. πόση είναι η ταχύτητα του ανώτερου σημείου κάθε κυλίνδρου;

(Απ: α) $a_{cm} = 4\text{m/s}^2$, $a_{\text{εφ(E)}} = 8\text{m/s}^2$ β) $a_\gamma = 20\text{rad/s}^2$ γ) i) $x_A = 27\text{m}$, $x_{cm} = 18\text{m}$ ii) $\omega = 60\text{rad/s}$ iii) $v_E = 24\text{m/s}$, $v_\Delta = 18\text{m/s}$)

6. Ένα τρακτέρ κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_0 = 20$ m/s σε ευθύγραμμο δρόμο. Η ακτίνα των μπροστινών τροχών είναι $R_1 = 0,4\text{m}$ και των πίσω είναι $R_2 = 0,8\text{m}$. Οι τροχοί κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ταχύτητα του τρακτέρ αρχίζει να μειώνεται με σταθερό ρυθμό και σταματά όταν οι μπροστινοί τροχοί έχουν εκτελέσει $\frac{62.5}{\pi}$ περιστροφές.

(α′) Υπολογίστε τη γωνιακή επιβράδυνση των τροχών (1) και (2).

(β′) Να βρεθεί ο συνολικός χρόνος της κίνησης.

(γ′) Πόσος είναι ο αριθμός των στροφών του τροχού (2) μέχρι που σταματά;

(δ′) Τη χρονική στιγμή t = 3 s, να βρείτε:

i. τις γωνιακές ταχύτητες περιστροφής των τροχών (1) και (2),

ii. τις ταχύτητες των ανωτέρων σημείων των τροχών (1) και (2).

(Απ: α) $\alpha_{\gamma,1} = 10\text{rad/s}^2$, $\alpha_{\gamma,2} = 5\text{rad/s}^2$ β) $t = 5$s
γ) $\frac{31.25}{\pi}$ στρ. δ) i) $\omega_1 = 10\text{rad/s}$, $\omega_2 = 10\text{rad/s}$)

7. Ένα όχημα έχει τροχούς ακτίνας $R = 0,25$m και κινείται σε ευθύγραμμα δρόμο με ταχύτητα μέτρου v_0. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό, ενώ οι τροχοί του κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Τη χρονική στιγμή $t = 2$s το όχημα σταματά έχοντας διανύσει απόσταση $x = 10$m. Να βρείτε:

(α′) Το μέτρο της επιβράδυνσης του κέντρου μάζας του τροχού.

(β′) Το μέτρο της γωνιακής επιβράδυνσης του τροχού.

(γ′) Τη γωνιακή ταχύτητα των τροχών σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

(δ′) Τον αριθμό των στροφών που έκαναν οι τροχοί:

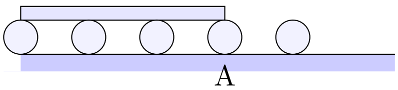
i. μέχρι να σταματήσουν.

ii. στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής τους.

(ε′) Το μέτρο της επιτάχυνσης του κατώτερου σημείου του τροχού τη χρονική στιγμή $t_1 = 1$s.

(Απ: α) $\alpha_{cm} = 5\text{m/s}^2$β) $\alpha\gamma = 20\text{rad/s}^2$ γ) $\omega = 40–20t$ δ) i) $\frac{20}{\pi}$ στρ. ii) $\frac{5}{\pi}$ στρ.)

8. Η δοκός του σχήματος έχει μήκος $\ell = 4$m και είναι αρχικά ακίνητη πάνω σε όμοιους κυλίνδρους ακτίνας $R = 0,1$m. Η μπροστινή άκρη του κιβωτίου ακουμπά στο ανώτερο σημείο του κυλίνδρου Α. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ τραβάμε τη δοκό προς τα δεξιά προσδίδοντας επιτάχυνση μέτρου $\alpha_{\text{κιβ}} = 4\ \text{m/s}^2$, οπότε αυτή κυλίεται πάνω στους κυλίνδρους χωρίς να ολισθαίνει και οι κύλινδροι κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν πάνω στο οριζόντιο έδαφος.



Ζητείται:

(α′) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου Α,

(β′) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου Α,

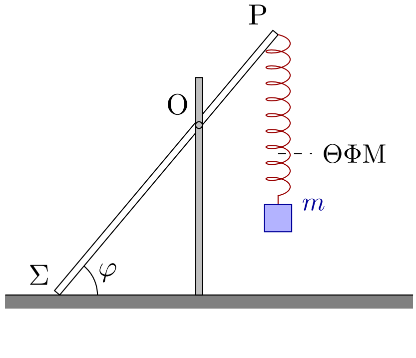
(γ′) η χρονική στιγμή t_1 που η δοκός εγκαταλείπει τον κύλινδρο Α,

(δ′) η μετακίνηση της δοκού και η μετακίνηση του κυλίνδρου Α τη χρονική στιγμή t_1,

(ε′) ο αριθμός των στροφών του κυλίνδρου Α στο χρονικό διάστημα $0 \to t_1$.

(Απ: α) $\alpha_{cm} = 2\text{m/s}^2$ β) $\alpha_\gamma = 20\text{rad/s}^2$ γ) $t = 2$s δ) $x_1 = 8$m, $x_2 = 4$m ε) $\frac{20}{\pi}$ στροφές)

9. [5] Ράβδος ΣΡ είναι αρθρωμένη στο σημείο Ο κατακόρυφου στύλου. Η ράβδος έχει μάζα $M = 6$kg και μήκος ℓ. Το άκρο Σ ακουμπά στο οριζόντιο επίπεδο σχηματίζοντας μ' αυτό γωνία φ. Στο άλλο άκρο Ρ της ράβδου είναι εξαρτημένο ελατήριο σταθεράς $K = 300$N/m. Στο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σώμα μάζας $m = 3$kg.
Για την άρθρωση Ο ισχύει ΣΟ = 3ΟΡ. Το σύστημα ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α′) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος από το δάπεδο και την άρθρωση.

(β′) Να υπολογιστεί το πλάτος ταλάντωσης του σώματος μάζας m, ώστε η ράβδος να μη χάνει οριακά την επαφή της με το οριζόντιο επίπεδο.

Για την προηγούμενη οριακή κατάσταση και για την ταλάντωση του σώματος, θεωρούμε χρονική στιγμή $t_0 = 0$ όταν το σώμα βρίσκεται κάτω από την θέση ισορροπίας, κινείται προς τα κάτω και για την κινητική και δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης, ισχύει η σχέση $K = 3U$.

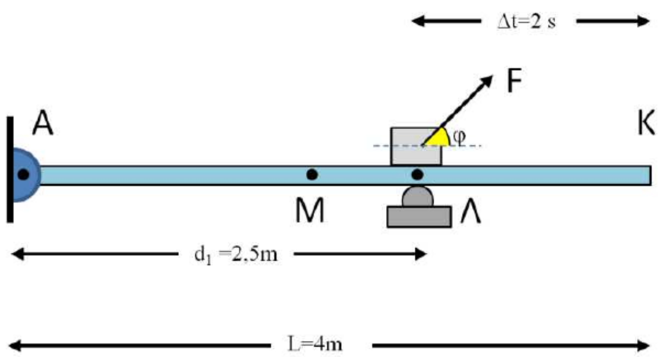
(γ′) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος μάζας m.

(δ′) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $t_1 = \pi/6\mathrm{s}$, το ρυθμό μεταβολής της επιτάχυνσης του ταλαντούμενου σώματος.

(ε′) Τη χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσετε τη στιγμιαία ισχύ της δύναμης του ελατηρίου.

Για την ταλάντωση θεωρούμε θετική φορά προς τα κάτω. Δίνεται: $g = 10\mathrm{m/s^2}$

10. [6] Η λεία ράβδος ΑΚ του σχήματος έχει μάζας $M = 2\mathrm{Kg}$ μήκος $L = 4\mathrm{m}$ και ισορροπεί οριζόντια με την βοήθεια άρθρωσης στο σημείο Α και στηρίγματος σε σημείο Λ, που απέχει από την άρθρωση Α απόσταση $d_1 = 2,5\mathrm{m}$. Πάνω στη ράβδο ηρεμεί ακίνητο σώμα μάζας $m = 20\mathrm{Kg}$, ξαφνικά τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα δέχεται πλάγια δύναμη $\vec{F}$ όπως φαίνεται σχήμα. Η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία φ, για το οποίο ισχύει συν$\,\varphi = 0,6$ και ημ$\,\varphi = 0,8$. Το σώμα μάζας m φτάνει το άκρο Κ της ράβδου τη χρονική στιγμή $t = 2\mathrm{s}$. Να υπολογίσετε:

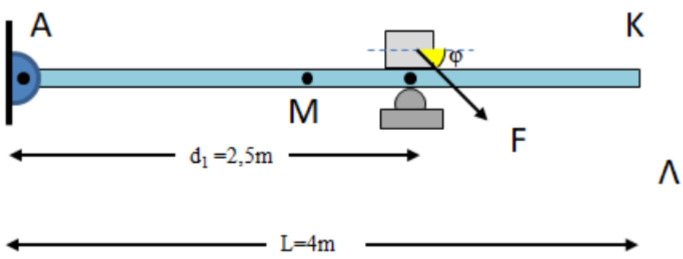


(α′) την επιτάχυνση με την οποία κινήθηκε το σώμα μάζα m μέχρι να φτάσει την άκρη της ράβδου.

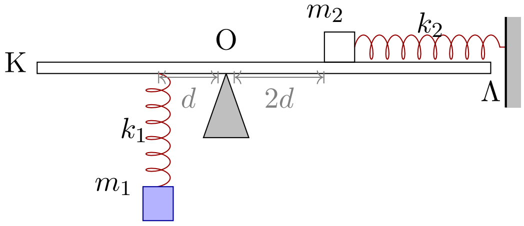
(β′) το μέτρο στης δύναμης $\vec{F}$ που δέχθηκε το σώμα, κατά τη διάρκεια της κίνησής του

(γ′) να γίνει η γραφική παράσταση της δύναμης (F_1) που δέχεται η ράβδος από το στήριγμα (Λ) σε σχέση με απόσταση που διανύει το σώμα μάζα m μέχρι να φτάσει στο άκρο της ράβδου

(δ′) αντικαθιστάμε την άρθρωση στο σημείο Α με μια άλλη, όπου το όριο θραύσεως της έχει μέτρο $F_{A(max)} = 29$ N και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία αλλάζοντας της διεύθυνση της $\vec{F}$ η οποία σχηματίζει γωνία φ με τον ορίζοντα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Θα μπορέσει το σώμα μάζας m να φτάσει στην άκρη Κ της ράβδου, αν όχι ποια χρονική στιγμή θα σπάσει η άρθρωση;



11. Η αβαρής λεία ράβδος ΚΛ του παραπάνω σχήματος έχει μεγάλο μήκος L και ισορροπεί σε οριζόντια θέση όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη θέση Γ ισορροπεί σώμα μάζας $m_1 = 2$ kg μέσω ελατηρίου σταθεράς $k_1 = 200$ N/m. Σώμα μάζας m_2 είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k_2 και ισορροπεί με το ελατήριο να βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Αν $d = 0,1$ m και $g = 10\,\text{m/s}^2$:



(α΄) Να βρείτε τη μάζα m_2.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα κάτω το m_1 από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 4$ m/s, ενώ ταυτόχρονα εκτοξεύουμε το m_2 με ταχύτητα μέτρου v_2 προς τα δεξιά και το κάθε σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Η ράβδος παραμένει διαρκώς οριζόντια.

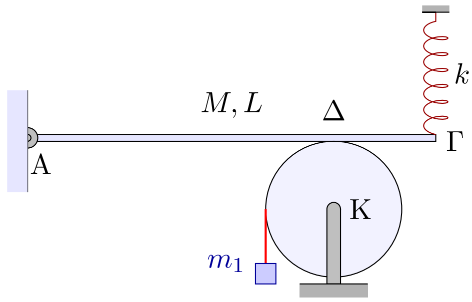
(β΄) Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης του m_1 στην Α.Α.Τ. που εκτελεί.

(γ΄) Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης του m_2 στην Α.Α.Τ. που εκτελεί.

(δ΄) Πόση είναι η ταχύτητα v_2 και πόση η σταθερά k_2 του ελατηρίου;

(Απ: α) $m_2 = 1$kg β) $x_1 = 0,4\,\eta\mu\,10t$ (S.I) γ) $x_2 = 0,8\,\eta\mu\,10t$ (S.I) δ) $v_2 = 8$m/s, $k = 100$N/m)

12. Η ομογενής ράβδος ΑΓ του παραπάνω σχήματος έχει μήκος $L = 4$ m, βάρος $w = 60$ N και ισορροπεί σε οριζόντια θέση με το άκρο της Α να είναι αρθρωμένο, ενώ το άκρο Γ έρχεται σε επαφή με κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m που είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell = 0,15$m. Το σημείο Δ της ράβδου έρχεται σε επαφή με τροχαλία βάρους $w_2 = 5$N, η οποία δεν περιστρέφεται λόγω τριβής που αναπτύσσεται με την οριζόντια ράβδο. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της Κ και είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχαλίας.



Ο άξονας είναι μέρος της άρθρωσης με την οποία η τροχαλία είναι ακλόνητα στερεωμένη σε δάπεδο. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα που δεν ολισθαίνει και στο άκρο του ισορροπεί σώμα Σ_1 βάρους $w_1 = 25$ N. Όλο το σύστημα διατηρείται ακίνητο. Να βρείτε:

(α΄) Το μέτρο της στατικής τριβής που δέχεται η ράβδος από την τροχαλία.

(β΄) Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η τροχαλία από τη ράβδο.

(γ΄) Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η τροχαλία από την άρθρωση στο σημείο Κ.

(δ΄) Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στο σημείο Α.

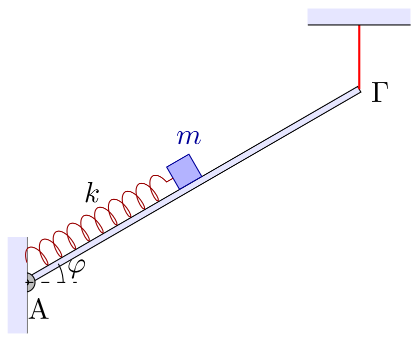
Δίνεται: $Α\Delta = 3\Delta\Gamma = 3$m και $\sqrt{1024} = 32$.

(Απ: α) $T_s = 25$N β) $A = 32$N γ) $F_K = 25\sqrt{2}$N δ)$F_A = 25\sqrt{2}$N)

13. Η λεία σανίδα του σχήματος έχει μήκος $L = 2$m και μάζα $M = 4$kg και στηρίζεται στο Α με άρθρωση και στο Β με νήμα. Η γωνία θ έχει $\eta\mu\,\theta = 0,6$.

Πάνω στη σανίδα ισορροπεί ένα σώμα μάζας $m = 2$kg δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 20$N/m.

Η θέση ισορροπίας του σώματος είναι στο μέσο Ο της σανίδας.



(α΄) Να βρεθεί το μέτρο της τάσης του νήματος.

Μετακινούμε το σώμα κατά $x = 0,2\text{m}$ πάνω στη σανίδα και το αφήνουμε ελεύθερο.

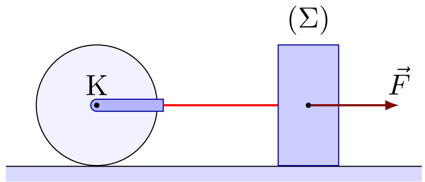
(β΄) Να αποδείξετε ότι κάνει ΑΑΤ και να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης.

(γ΄) Να βρεθεί η εξίσωση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο t, αν για $t = 0$, $x = +A$.

(δ΄) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής και της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0,5\text{s}$

(Απ. α. 30N, β. $x = 0,2\,\text{ημ}(\pi t + \pi/2)$, γ. $T = 30 + 2\,\text{ημ}(\pi t + \pi/2)$, δ. 0 και 0)

14. [7] Σημειακό σώμα Σ μάζας $m = 2$ kg είναι δεμένο με τη βοήθεια αβαρούς και μη εκτατού νήματος στο κέντρο ενός ομογενούς δίσκου ακτίνας $R = 0,2$ m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, και ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο δεν εμφανίζει τριβή, σε αντίθεση με το δίσκο που εμφανίζει.



Αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο.Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται στο σημειακό σώμα Σ σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 10$ N με αποτέλεσμα να αρχίσει το σώμα Σ να κινείται και ο δίσκος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s το σώμα Σ έχει διανύσει 4 m. Να βρεθούν:

(α΄) Ο αριθμός των περιστροφών του δίσκου στο χρονικό διάστημα από 0 ως t_1.

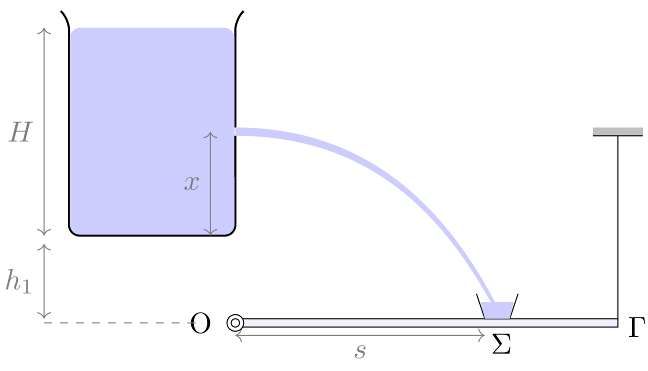
(β΄) Η κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1.

(γ΄) Το ρυθμό προσφοράς ενέργειας στο σύστημα την χρονική στιγμή t_1 καθώς και το ρυθμό προσφοράς ενέργειας στο δίσκο την ίδια χρονική στιγμή.

(δ΄) Ποια χρονική στιγμή το σημείο της περιφέρειας του δίσκου που είναι πιο κοντά στο σώμα Σ και ταυτόχρονα απέχει απόσταση R από το έδαφος έχει στιγμιαία επιτάχυνση κατακόρυφης διεύθυνσης;

(Απ. α) $N = 10/\pi$ περ. β) $K = 24\text{J}$ γ) 40J/s, 24J/s, δ) $t_2 = 0.1\sqrt{10}\text{s}$)

15. Οριζόντια ράβδος μήκους L και μάζας $M = 2\text{kg}$ είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο με σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο σε αυτήν. Στο άλλο άκρο της Γ είναι στερεωμένη με κατακόρυφο νήμα. Σε ύψος h_1 πάνω από τη ράβδο βρίσκεται μεγάλο δοχείο με νερό στήλης H. Σε ύψος x από την βάση του δοχείου, ανοίγουμε μικρή τρύπα εμβαδού A από την οποία εξέρχεται οριζόντια νερό. Η φλέβα του νερού καταλήγει σε αβαρές ποτήρι στερεωμένο σταθερά στη ράβδο, σε κατάλληλο σημείο Σ, έτσι ώστε να συλλέγει το νερό.



(α΄) Να υπολογίσετε το ύψος x ώστε το νερό να έχει το μέγιστο δυνατό βεληνεκές s.

(β΄) Υπολογίστε τον όγκο του υγρού που βρίσκεται κάθε χρονική στιγμή στον αέρα, από τη στιγμή που φτάνει η φλέβα στο ποτήρι.

(γ΄) Βρείτε την τάση του νήματος συναρτήσει του χρόνου, θεωρώντας $t_0 = 0$ την στιγμή που ανοίγουμε την τρύπα στο δοχείο.

(δ΄) Υπολογίστε τη δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Βιβλιογραφία

[1] Ψηφιακά Εκπαιδευτικά Βοηθήματα, http://www.study4exams.gr/, 2019.

[2] Πρόδρομος Κορκίζογλου. Υλικό φυσικής - χημείας, https://ylikonet.gr, 2019.

[3] Ανδρέας Ριζόπουλος. Υλικό φυσικής - χημείας, https://ylikonet.gr, 2019.

[4] Διονύσιος Μάργαρης. Υλικό φυσικής - χημείας, https://ylikonet.gr, 2018.

[5] Μαρίνος Ηλιόπουλος. https://ylikonet.gr/2021/02/07/ράβδος-σε-επαφή-με-ταλαντούμενο-σύστη/, 2021.

[6] Ιωάννης Αγγελόπουλος. https://ylikonet.gr/2021/02/15/άλλο-η-κάθετη-δύναμη-δαπέδου-n-άλλο-το-β/, 2021.

[7] Νεκτάριος Πρωτοπαπάς. Υλικό φυσικής - χημείας, https://ylikonet.gr/2020/04/18/στερεό-ανέστη/, 2020.